

**Máster de Formación del Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y
Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas**

Trabajo Fin de Máster

Ámbito Matemáticas

**Métodos de resolución y errores en
problemas de funciones lineales y afines del
alumnado de 3º ESO del aula ordinaria y del
aula de excelencia**

Mercedes Puyal Vijuesca

ÍNDICE

Introducción general.....	5
Parte I: Las funciones lineales y afines en el currículo vigente y en los libros de texto	7
Capítulo 1 Las funciones lineales y afines en el currículo vigente	11
1.1. Contenido en Educación Primaria	11
1.2. Contenido en ESO	12
1.3. Contenido en Bachillerato	16
Capítulo 2 Los criterios de evaluación de las funciones lineales y afines en el currículo vigente	19
2.1. Criterios de evaluación en Educación Primaria.....	19
2.2. Criterios de evaluación en ESO.....	20
2.3. Criterios de evaluación en Bachillerato.....	27
Capítulo 3 Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en los libros de texto y su relación con las funciones lineales y afines en el currículo vigente.....	33
3.1. Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en 1º ESO	33
3.2. Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en 2º ESO	36
3.3. Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en 3º ESO	39
3.4. Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en 4º ESO, Ciencias y Tecnología.....	42
3.5. Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en 4º ESO, Ciencias Sociales	44
3.6. Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en 1º Bachillerato, Ciencias y Tecnología.....	46
3.7. Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en 1º Bachillerato, Ciencias Sociales	48
Capítulo 4 Resultados	51
4.1. Ausencias y presencias en el currículo y en los libros de texto.....	51
4.2. Coherencia de los libros de texto en relación con el currículo	52
Parte II: Análisis de un proceso de estudio de las funciones lineales y afines en 3º ESO	55
Capítulo 5 Las funciones lineales y afines en el libro de texto de referencia	59
5.1. Objetos matemáticos involucrados.....	59
5.2. Análisis global de la unidad didáctica	61
Capítulo 6 Dificultades y errores previsibles en el aprendizaje de la unidad didáctica.....	67
6.1. Dificultades	67

6.2.	Errores esperables y su posible origen	68
Capítulo 7	El proceso de estudio	69
7.1.	Distribución del tiempo de la clase.....	69
7.2.	Actividades adicionales planificadas.....	72
7.3.	La tarea: actividad autónoma del alumnado prevista	73
Capítulo 8	Experimentación	75
8.1.	Muestra y diseño de la experimentación	75
8.2.	El cuestionario	76
8.3.	Cuestiones y comportamientos esperados	79
8.4.	Resultados	81
8.5.	Discusión de los resultados	98
	Síntesis, conclusiones y cuestiones abiertas.....	101
	Referencias.....	105
	Anexos.....	109
A.	Unidad didáctica del libro de texto	111
B.	Unidad didáctica “Funciones lineales y afines” del centro educativo.....	129
C.	Material proyectado en clase.....	139
D.	Problema repaso “Necesito un fontanero”	153
E.	Modelo de evaluación del examen	155

Introducción general

Este Trabajo Fin de Máster tiene como objetivo estudiar los métodos de resolución y errores en problemas de funciones lineales y afines del alumnado de 3º ESO del aula ordinaria y del aula de excelencia.

El trabajo se estructura en dos partes. En la primera parte se realiza un estudio longitudinal del currículo y de los libros de texto en el tercer ciclo de Primaria, en ESO y en Bachillerato con relación al tema indicado.

En la segunda parte se propone un proceso de estudio de las funciones lineales y afines, que se ha puesto en marcha en un aula de 3º ESO en el marco del Prácticum II del Máster. Los resultados extraídos de esta experimentación se fundamentan en un cuestionario construido *ad hoc*, teniendo en cuenta asimismo las restricciones institucionales.

El trabajo concluye con una síntesis, unas conclusiones y unas cuestiones abiertas.

Parte I: Las funciones lineales y afines en el currículo vigente y en los libros de texto

En esta primera parte del Trabajo Fin de Máster se analiza cómo se aborda el tratamiento de las funciones lineales y afines en el currículo y en los libros de texto en el tercer ciclo de Primaria, en ESO y en Bachillerato.

El análisis se divide en cuatro capítulos. En el primer y segundo capítulo se muestran en forma de tabla los contenidos y criterios de evaluación del currículo vigente que hacen referencia a las funciones lineales y afines en cada uno de los grados. En el tercero se presentan ejemplos de las actividades tipo (ejercicios, problemas, cuestiones y situaciones) propuestas en un libro de texto de 3º ESO, así como en dos cursos anteriores y dos posteriores.

Las conclusiones que se extraen del análisis comparativo de los contenidos de ambas fuentes (currículo y libro de texto) se exponen en el cuarto capítulo. El objetivo aquí es valorar la coherencia de los manuales con relación al currículo vigente y resaltar las presencias o ausencias de conocimientos matemáticos relativos al tema objeto de análisis.

Capítulo 1 Las funciones lineales y afines en el currículo vigente

En este capítulo se presentan los contenidos relacionados con las funciones lineales y afines en el currículo vigente publicado en el Boletín Oficial del Estado para Educación Primaria, ESO y Bachillerato.

1.1. Contenido en Educación Primaria

3 ^{er} ciclo Primaria	
Descriptor	Contenido
Proporcionalidad	<i>Bloque 3. Geometría.</i> Introducción a la semejanza: ampliaciones y reducciones (doble, mitad).
Funciones: álgebra	<i>Bloque 1. Números y operaciones.</i> Estrategias de cálculo: Establecimiento de relaciones entre los números. Afianzamiento de la capacidad para formular razonamientos y para argumentar sobre la validez de una solución identificando, en su caso, los errores. <i>Bloque 2. La medida: estimación y cálculo de magnitudes.</i> Longitud, peso/masa, capacidad y superficie: Equivalencias entre unidades de una misma magnitud utilizando los algoritmos de cálculo correspondientes. Utilización de factores de conversión entre unidades estándar. Medida del tiempo: Unidades de medida del tiempo y sus relaciones. La precisión con los minutos y los segundos. Equivalencias y transformaciones entre horas, minutos y segundos, en situaciones reales.
Funciones: geometría	<i>Bloque 3. Geometría.</i> La situación en el plano y en el espacio, distancias, ángulos y giros: La representación elemental del espacio, escalas y gráficas sencillas.
Análisis de funciones, tablas de valores y gráficas	<i>Bloque 4. Tratamiento de la información, azar y probabilidad.</i> Gráficos y parámetros estadísticos: Distintas formas de representar la información. Tipos de gráficos estadísticos: diagramas de barras, pictogramas, polígonos de frecuencias y diagramas de sectores. Valoración de la expresividad del lenguaje gráfico para la representación de datos.
Modelado de situaciones cotidianas	<i>Bloque 1. Números y operaciones.</i> Estrategias de cálculo: Resolución de problemas de la vida cotidiana utilizando estrategias personales de cálculo mental y relaciones entre los números, explicando oralmente y por escrito el significado de los datos, la situación planteada, el proceso seguido y las soluciones obtenidas.
Uso de tecnologías	-

1.2. Contenido en ESO

1 ^{er} ciclo ESO		
Descriptor	Contenido 1º	Contenido 2º
Proporcionalidad	<i>Bloque 2. Números.</i> Razón y proporción. Aplicación a la resolución de problemas en las que intervenga la proporcionalidad directa. Porcentajes para expresar composiciones o variaciones. Cálculo mental y escrito con porcentajes habituales.	<i>Bloque 2. Números.</i> Proporcionalidad directa e inversa. Análisis de tablas. Razón de proporcionalidad. Aumentos y disminuciones porcentuales. Relaciones entre fracciones, decimales y porcentajes. Uso de estas relaciones para elaborar estrategias de cálculo práctico con porcentajes.
Funciones: álgebra	<i>Bloque 3. Álgebra.</i> Empleo de letras para simbolizar números inicialmente desconocidos y números sin concretar. Utilidad de la simbolización para expresar cantidades en distintos contextos. Búsqueda y expresión de propiedades, relaciones y regularidades en secuencias numéricas. Obtención de valores numéricos en fórmulas sencillas.	<i>Bloque 3. Álgebra.</i> El lenguaje algebraico para generalizar propiedades y simbolizar relaciones. Obtención de fórmulas y términos generales basada en la observación de pautas y regularidades. Obtención del valor numérico de una expresión algebraica.
Funciones: geometría	<i>Bloque 4. Geometría.</i> Clasificación de triángulos y cuadriláteros a partir de diferentes criterios. Estudio de algunas propiedades y relaciones en estos polígonos.	<i>Bloque 4. Geometría.</i> Figuras con la misma forma y distinto tamaño. La semejanza. Proporcionalidad de segmentos. Identificación de relaciones de semejanza. Ampliación y reducción de figuras. Obtención, cuando sea posible, del factor de escala utilizado. Razón entre las superficies de figuras semejantes. Utilización de los teoremas de Tales y Pitágoras para obtener medidas y comprobar relaciones entre figuras.
Análisis de funciones, tablas de valores y gráficas	<i>Bloque 5. Funciones y gráficas.</i> Identificación de relaciones de proporcionalidad directa a partir del análisis de su tabla de valores. Utilización de contraejemplos cuando las magnitudes no sean directamente proporcionales. Interpretación puntual y global de informaciones presentadas en una tabla o representadas en una gráfica. Detección de errores en las gráficas que pueden afectar a su interpretación.	<i>Bloque 5. Funciones y gráficas.</i> Descripción local y global de fenómenos presentados de forma gráfica. Obtención de la relación entre dos magnitudes directa o inversamente proporcionales a partir del análisis de su tabla de valores y de su gráfica. Representación gráfica de una situación que viene dada a partir de una tabla de valores, de un enunciado o de una expresión algebraica sencilla.
Modelado de situaciones cotidianas	<i>Bloque 2. Números.</i> Identificación y utilización en situaciones de la vida cotidiana de	<i>Bloque 2. Números.</i> Resolución de problemas relacionados con la vida cotidiana

1º ciclo ESO		
Descriptor	Contenido 1º	Contenido 2º
	<p>magnitudes directamente proporcionales.</p> <p><i>Bloque 3. Álgebra.</i> Traducción de expresiones del lenguaje cotidiano al algebraico y viceversa. Valoración de la precisión y simplicidad del lenguaje algebraico para representar y comunicar diferentes situaciones cotidianas.</p> <p><i>Bloque 5. Funciones y gráficas.</i> Identificación y verbalización de relaciones de dependencia en situaciones cotidianas.</p>	<p>en los que aparezcan relaciones de proporcionalidad directa o inversa.</p> <p><i>Bloque 5. Funciones y gráficas.</i> Interpretación de la constante de proporcionalidad. Aplicación a situaciones reales. Interpretación de las gráficas como relación entre dos magnitudes. Observación y experimentación en casos prácticos.</p>
Uso de tecnologías	<p><i>Bloque 1. Contenidos comunes.</i> Utilización de herramientas tecnológicas para facilitar los cálculos de tipo numérico, algebraico o estadístico, las representaciones funcionales y la comprensión de propiedades geométricas.</p> <p><i>Bloque 4. Geometría.</i> Empleo de herramientas informáticas para construir, simular e investigar relaciones entre elementos geométricos.</p>	<p><i>Bloque 1. Contenidos comunes.</i> Utilización de herramientas tecnológicas para facilitar los cálculos de tipo numérico, algebraico o estadístico, las representaciones funcionales y la comprensión de propiedades geométricas.</p> <p><i>Bloque 5. Funciones y gráficas.</i> Utilización de calculadoras gráficas y programas de ordenador para la construcción e interpretación de gráficas.</p>

2º ciclo ESO			
Descriptor	Contenido 3º	Contenido 4º Opción Ciencias y Tecnología	Contenido 4º Opción Ciencias Sociales
Proporcionalidad	-	-	<i>Bloque 2. Números.</i> Proporcionalidad directa e inversa. Los porcentajes en la economía. Aumentos y disminuciones porcentuales.
Funciones: álgebra	<i>Bloque 3. Álgebra.</i> Curiosidad e interés por investigar las regularidades, relaciones y propiedades que aparecen en conjuntos de números. Traducción de situaciones del lenguaje verbal al	<i>Bloque 3. Álgebra.</i> Resolución gráfica y algebraica de los sistemas de ecuaciones.	<i>Bloque 3. Bloque Álgebra.</i> Manejo de expresiones literales para la obtención de valores concretos en fórmulas y ecuaciones en diferentes contextos. Resolución gráfica y algebraica de los sistemas de ecuaciones.

2º ciclo ESO			
Descriptor	Contenido 3º	Contenido 4º Opción Ciencias y Tecnología	Contenido 4º Opción Ciencias Sociales
	<p>algebraico. Transformación de expresiones algebraicas. Resolución de ecuaciones de primer y segundo grado con una incógnita. Sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas. Resolución de problemas mediante la utilización de ecuaciones, sistemas y otros métodos personales.</p>		
Funciones: geometría	<p><i>Bloque 4. Geometría.</i> Aplicación de los teoremas de Tales y Pitágoras a la resolución de problemas geométricos y del medio físico. Interpretación de mapas y resolución de problemas asociados. Curiosidad e interés por investigar sobre formas, configuraciones y relaciones geométricas.</p>	<p><i>Bloque 4. Geometría.</i> Razones trigonométricas. Relaciones entre ellas. Relaciones métricas en los triángulos. Uso de la calculadora para el cálculo de ángulos y razones trigonométricas. Aplicación de los conocimientos geométricos a la resolución de problemas métricos en el mundo físico: medida de longitudes, áreas y volúmenes. Razón entre longitudes, áreas y volúmenes de cuerpos semejantes.</p>	<p><i>Bloque 4. Geometría.</i> Aplicación de la semejanza de triángulos y el teorema de Pitágoras para la obtención indirecta de medidas.</p>
Análisis de funciones, tablas de valores y gráficas	<p><i>Bloque 5. Funciones y gráficas.</i> Análisis de una situación a partir del estudio de las características locales y globales de la gráfica correspondiente: dominio, continuidad,</p>	<p><i>Bloque 5. Funciones y gráficas.</i> Interpretación de un fenómeno descrito mediante un enunciado, tabla, gráfica o expresión analítica. Análisis de resultados. La tasa de variación media como medida de la</p>	<p><i>Bloque 5. Funciones y gráficas.</i> Interpretación de un fenómeno descrito mediante un enunciado, tabla, gráfica o expresión analítica. Análisis de resultados. La tasa de variación media como medida de la variación</p>

2º ciclo ESO			
Descriptor	Contenido 3º	Contenido 4º Opción Ciencias y Tecnología	Contenido 4º Opción Ciencias Sociales
	monotonía, extremos y puntos de corte. Formulación de conjeturas sobre el comportamiento del fenómeno que representa una gráfica y su expresión algebraica. Análisis y comparación de situaciones de dependencia funcional dadas mediante tablas y enunciados. Utilización de las distintas formas de representar la ecuación de la recta.	variación de una función en un intervalo. Análisis de distintas formas de crecimiento en tablas, gráficas y enunciados verbales. Funciones definidas a trozos. Búsqueda e interpretación de situaciones reales.	de una función en un intervalo. Análisis de distintas formas de crecimiento en tablas, gráficas y enunciados verbales.
Modelado de situaciones cotidianas	<p><i>Bloque 3. Álgebra.</i> Valoración de la precisión, simplicidad y utilidad del lenguaje algebraico para resolver diferentes situaciones de la vida cotidiana.</p> <p><i>Bloque 5. Funciones y gráficas.</i> Análisis y descripción cualitativa de gráficas que representan fenómenos del entorno cotidiano y de otras materias. Utilización de modelos lineales para estudiar situaciones provenientes de los diferentes ámbitos de conocimiento y de la vida cotidiana, mediante la confección de la tabla, la</p>	<p><i>Bloque 3. Álgebra.</i> Resolución de problemas cotidianos y de otras áreas de conocimiento mediante ecuaciones y sistemas.</p>	<p><i>Bloque 2. Números.</i> Aplicación a la resolución de problemas de la vida cotidiana.</p> <p><i>Bloque 3. Bloque Álgebra.</i> Resolución de problemas cotidianos y de otras áreas de conocimiento mediante ecuaciones y sistemas.</p> <p><i>Bloque 4. Geometría.</i> Resolución de problemas geométricos frecuentes en la vida cotidiana.</p>

2º ciclo ESO			
Descriptor	Contenido 3º	Contenido 4º Opción Ciencias y Tecnología	Contenido 4º Opción Ciencias Sociales
	representación gráfica y la obtención de la expresión algebraica.		
Uso de tecnologías	<p><i>Bloque 1. Contenidos comunes.</i> Utilización de herramientas tecnológicas para facilitar los cálculos de tipo numérico, algebraico o estadístico, las representaciones funcionales y la comprensión de propiedades geométricas.</p> <p><i>Bloque 5. Funciones y gráficas.</i> Uso de las tecnologías de la información para el análisis conceptual y reconocimiento de propiedades de funciones y gráficas.</p>	<p><i>Bloque 1. Contenidos comunes.</i> Utilización de herramientas tecnológicas para facilitar los cálculos de tipo numérico, algebraico o estadístico, las representaciones funcionales y la comprensión de propiedades geométricas.</p> <p><i>Bloque 5. Funciones y gráficas.</i> Uso de las tecnologías de la información en la representación, simulación y análisis gráfico.</p>	<p><i>Bloque 1. Contenidos comunes.</i> Utilización de herramientas tecnológicas para facilitar los cálculos de tipo numérico, algebraico o estadístico, las representaciones funcionales y la comprensión de propiedades geométricas.</p>

1.3. Contenido en Bachillerato

Bachillerato Ciencias y Tecnología		
Descriptor	Contenido 1º	Contenido 2º
Proporcionalidad	-	-
Funciones: álgebra	<p><i>1. Aritmética y álgebra:</i> Planteamiento y resolución de problemas de la vida cotidiana mediante la resolución de ecuaciones e inecuaciones de primer y segundo grado. Interpretación gráfica. Valoración de las tecnologías de la información y la comunicación para la resolución de problemas algebraicos.</p>	-
Funciones: geometría	<p><i>2. Geometría:</i> Cálculo de las razones trigonométricas de un ángulo. Uso de fórmulas y transformaciones trigonométricas en la resolución de</p>	<p><i>2. Geometría:</i> Vectores en el espacio tridimensional. Dependencia e independencia lineal. Ecuaciones de la recta y el plano</p>

Bachillerato Ciencias y Tecnología		
Descriptor	Contenido 1º	Contenido 2º
	triángulos y problemas geométricos diversos. Ecuaciones de la recta. Posiciones relativas de rectas. Idea de lugar geométrico en el plano: ecuación de la mediatriz de un segmento y bisectriz del ángulo determinado por dos rectas.	en el espacio. Resolución de problemas de posiciones relativas entre rectas y planos. Resolución de problemas métricos relacionados con el cálculo de ángulos, distancias, áreas y volúmenes.
Análisis de funciones, tablas de valores y gráficas	<p><i>3. Análisis:</i> Funciones reales de variable real: Dominio, recorrido y extremos de una función. Extremos relativos de una función en un intervalo. Interpretación intuitiva de las propiedades globales y locales de una función mediante el análisis de su dominio, recorrido, crecimiento, extremos, tendencia y continuidad.</p>	-
Modelado de situaciones cotidianas	<p><i>1. Aritmética y álgebra:</i> Planteamiento y resolución de problemas de la vida cotidiana mediante la resolución de ecuaciones e inecuaciones de primer y segundo grado.</p> <p><i>3. Análisis:</i> Disposición para modelizar situaciones y fenómenos con ayuda de gráficas conocidas.</p>	-
Uso de tecnologías	<p><i>1. Aritmética y álgebra:</i> Valoración de las tecnologías de la información y la comunicación para la resolución de problemas algebraicos.</p> <p><i>2. Geometría:</i> Valoración de las tecnologías de la información y la comunicación para la resolución de problemas geométricos.</p> <p><i>3. Análisis:</i> Valoración de las tecnologías para el estudio y la representación gráfica de funciones.</p>	-

Bachillerato Ciencias Sociales		
Descriptor	Contenido 1º	Contenido 2º
Proporcionalidad	-	-
Funciones: álgebra	<i>1. Aritmética y álgebra.</i> Resolución de problemas del ámbito de las ciencias sociales mediante la utilización de ecuaciones o sistemas de ecuaciones de primer y segundo grado con dos incógnitas.	<i>1. Álgebra.</i> Programación lineal bidimensional. Región factible. Determinación e interpretación de las soluciones óptimas.
Funciones: geometría	-	-
Análisis de funciones, tablas de valores y gráficas	<i>2. Análisis.</i> Funciones reales de variable real. Expresión de una función en forma algebraica, por medio de tablas o de gráficas. Aspectos globales de una función. Utilización de las funciones como herramienta para la resolución de problemas y la interpretación de fenómenos sociales y económicos. Interpolación y extrapolación lineal. Aplicación a problemas reales. Tasa de variación media. Aplicación al estudio de fenómenos económicos y sociales.	-
Modelado de situaciones cotidianas	<i>2. Análisis.</i> Funciones reales de variable real. Expresión de una función en forma algebraica, por medio de tablas o de gráficas. Aspectos globales de una función. Utilización de las funciones como herramienta para la resolución de problemas y la interpretación de fenómenos sociales y económicos. Interpolación y extrapolación lineal. Aplicación a problemas reales. Tasa de variación media. Aplicación al estudio de fenómenos económicos y sociales.	<i>1. Álgebra.</i> Aplicación a la resolución de problemas sociales, económicos y demográficos.
Uso de tecnologías	-	-

Capítulo 2 Los criterios de evaluación de las funciones lineales y afines en el currículo vigente

En este capítulo se presentan los criterios de evaluación de los contenidos relacionados con las funciones lineales y afines en el currículo vigente publicado en el Boletín Oficial del Estado para Educación Primaria, ESO y Bachillerato.

2.1. Criterios de evaluación en Educación Primaria

3 ^{er} ciclo Primaria	
Descriptor	Criterios de evaluación
Proporcionalidad	<p>7. Interpretar una representación espacial (croquis de un itinerario, plano de casas y maquetas) realizada a partir de un sistema de referencia y de objetos o situaciones familiares.</p> <p>Este criterio pretende evaluar el desarrollo de capacidades espaciales en relación con puntos de referencia, distancias, desplazamientos y, en ciertos casos, ejes de coordenadas, mediante representaciones de espacios familiares.</p>
Funciones: álgebra	<p>5. Seleccionar, en contextos reales, los más adecuados entre los instrumentos y unidades de medida usuales, haciendo previamente estimaciones y expresar con precisión medidas de longitud, superficie, peso/masa, capacidad y tiempo.</p> <p>Con este criterio se pretende detectar la capacidad de escoger los instrumentos de medida más pertinentes en cada caso, y de estimar la medida de magnitudes de longitud, capacidad, masa y tiempo haciendo previsiones razonables. También se quiere comprobar la capacidad de utilizar con corrección las unidades de medida más usuales, convertir unas unidades en otras de la misma magnitud, y que los resultados de las mediciones que se realizan se expresan en las unidades de medida más adecuadas. Asimismo, se valorará la capacidad de explicar oralmente y por escrito, con progresiva autonomía, los razonamientos.</p>
Funciones: geometría	<p>6. Utilizar las nociones geométricas de paralelismo, perpendicularidad, simetría, perímetro y superficie para describir y comprender situaciones de la vida cotidiana.</p> <p>En este criterio es importante detectar que los estudiantes han aprendido estas nociones y saben utilizar los términos correspondientes para dar y pedir información. Se evaluará si dichos contenidos son utilizados con propiedad para comprender y emitir informaciones diversas, en particular si son utilizados en la resolución de problemas geométricos del entorno.</p> <p>12. Predecir una solución razonable y buscar los procedimientos matemáticos más adecuados al planificar el proceso de resolución de un problema sencillo.</p> <p>Se pretende comprobar la capacidad de comprensión de la situación planteada por el problema mediante la emisión de una solución razonable al mismo, lo que implica la disposición para enfrentarse a situaciones inciertas y para analizar situaciones con la ayuda de códigos y la necesidad de hacer corresponder patrones numéricos, geométricos o gráficos con descripciones verbales o escritas de manera coherente. Se valorará el grado de adquisición de este criterio a través especialmente de la explicación oral y escrita de los razonamientos sobre la pertinencia de la solución propuesta.</p>

3 ^{er} ciclo Primaria	
Descriptor	Criterios de evaluación
Análisis de funciones, tablas de valores y gráficas	<p>8. <i>Realizar, leer e interpretar representaciones gráficas y tablas numéricas de un conjunto de datos relativos a contextos familiares.</i></p> <p>Este criterio trata de comprobar la capacidad de recoger y registrar una información que se pueda cuantificar, de utilizar algunos recursos sencillos de representación gráfica: tablas de datos, diagramas de barras, pictogramas, polígonos de frecuencias y diagramas de sectores. También se valorará el grado de comprensión de la información así expresada, mediante la comunicación oral y escrita del razonamiento seguido.</p>
Modelado de situaciones cotidianas	<p>6. <i>Utilizar las nociones geométricas de paralelismo, perpendicularidad, simetría, perímetro y superficie para describir y comprender situaciones de la vida cotidiana.</i></p> <p>En este criterio es importante detectar que los estudiantes han aprendido estas nociones y saben utilizar los términos correspondientes para dar y pedir información. Se evaluará si dichos contenidos son utilizados con propiedad para comprender y emitir informaciones diversas, en particular si son utilizados en la resolución de problemas geométricos del entorno.</p>
Uso de tecnologías	-

2.2. Criterios de evaluación en ESO

1 ^{er} ciclo ESO		
Descriptor	Criterios de evaluación 1º	Criterios de evaluación 2º
Proporcionalidad	<p>1. <i>Utilizar números naturales y enteros y fracciones y decimales sencillos, sus operaciones y propiedades, para recoger, transformar e intercambiar información.</i></p> <p>Se trata de comprobar la capacidad de identificar y emplear los números y las operaciones siendo consciente de su significado y propiedades, elegir la forma de cálculo más apropiada (mental, escrita o con calculadora) y transmitir informaciones utilizando los números de manera adecuada. Se debe prestar una especial atención a valorar, en casos sencillos, la competencia en el uso de operaciones combinadas como síntesis de la secuencia de operaciones aritméticas.</p>	<p>1. <i>Utilizar números enteros, fracciones, decimales y porcentajes sencillos, sus operaciones y propiedades, para recoger, transformar e intercambiar información y resolver problemas relacionados con la vida diaria.</i></p> <p>Se trata de valorar la capacidad de identificar y emplear los números y las operaciones siendo consciente de su significado y propiedades, elegir la forma de cálculo apropiada (mental, escrita o con calculadora) y estimar la coherencia y precisión de los resultados obtenidos. Entre las operaciones a las que se refiere este criterio deben considerarse incluidas las potencias de exponente natural. Adquiere especial relevancia evaluar el uso de diferentes estrategias que permitan simplificar el cálculo con fracciones, decimales y porcentajes, así como la habilidad para aplicar esos cálculos a una amplia variedad de contextos.</p>

1 ^{er} ciclo ESO		
Descriptor	Criterios de evaluación 1º	Criterios de evaluación 2º
		<p>2. <i>Identificar relaciones de proporcionalidad numérica y geométrica y utilizarlas para resolver problemas en situaciones de la vida cotidiana.</i></p> <p>Se pretende comprobar la capacidad de identificar, en diferentes contextos, una relación de proporcionalidad entre dos magnitudes.</p>
Funciones: álgebra	<p>3. <i>Identificar y describir regularidades, pautas y relaciones en conjuntos de números, utilizar letras para simbolizar distintas cantidades y obtener expresiones algebraicas como síntesis en secuencias numéricas, así como el valor numérico de fórmulas sencillas.</i></p> <p>Este criterio pretende comprobar la capacidad para percibir en un conjunto numérico aquello que es común, la secuencia lógica con que se ha construido, un criterio que permita ordenar sus elementos y, cuando sea posible, expresar algebraicamente la regularidad percibida. Se pretende, asimismo, valorar el uso del signo igual como asignador y el manejo de la letra en sus diferentes acepciones. Forma parte de este criterio también la obtención del valor numérico en fórmulas simples con una sola letra.</p>	<p>3. <i>Utilizar el lenguaje algebraico para simbolizar, generalizar e incorporar el planteamiento y resolución de ecuaciones de primer grado como una herramienta más con la que abordar y resolver problemas.</i></p> <p>Se pretende comprobar la capacidad de utilizar el lenguaje algebraico para generalizar propiedades sencillas y simbolizar relaciones, así como plantear ecuaciones de primer grado para resolverlas por métodos algebraicos y también por métodos de ensayo y error. Se pretende evaluar, también, la capacidad para poner en práctica estrategias personales como alternativa al álgebra a la hora de plantear y resolver los problemas. Asimismo, se ha de procurar valorar la coherencia de los resultados.</p>
Funciones: geometría	<p>4. <i>Reconocer y describir figuras planas, utilizar sus propiedades para clasificarlas y aplicar el conocimiento geométrico adquirido para interpretar y describir el mundo físico, haciendo uso de la terminología adecuada.</i></p> <p>Se pretende evaluar también la experiencia adquirida en la utilización de diferentes elementos y formas geométricas.</p>	<p>4. <i>Estimar y calcular longitudes, áreas y volúmenes de espacios y objetos con una precisión acorde con la situación planteada y comprender los procesos de medida, expresando el resultado de la estimación o el cálculo en la unidad de medida más adecuada.</i></p> <p>Mediante este criterio se valora la capacidad para comprender y diferenciar los conceptos de longitud, superficie y volumen y seleccionar la unidad adecuada para cada uno de ellos. Se trata de comprobar, además, si se han adquirido las capacidades necesarias para estimar el tamaño de los objetos. Más allá de la habilidad para memorizar</p>

1 ^{er} ciclo ESO		
Descriptor	Criterios de evaluación 1 ^o	Criterios de evaluación 2 ^o
		fórmulas y aplicarlas, este criterio pretende valorar el grado de profundidad en la comprensión de los conceptos implicados en el proceso y la diversidad de métodos que se es capaz de poner en marcha.
Análisis de funciones, tablas de valores y gráficas	<p><i>6. Organizar e interpretar informaciones diversas mediante tablas y gráficas, e identificar relaciones de dependencia en situaciones cotidianas.</i></p> <p>Se trata de evaluar, además, el uso de las tablas como instrumento para recoger información y transferirla a unos ejes coordenados, así como la capacidad para interpretar de forma cualitativa la información presentada en forma de tablas y gráficas.</p>	<p><i>5. Interpretar relaciones funcionales sencillas dadas en forma de tabla, gráfica, a través de una expresión algebraica o mediante un enunciado, obtener valores a partir de ellas y extraer conclusiones acerca del fenómeno estudiado.</i></p> <p>Este criterio pretende valorar el manejo de los mecanismos que relacionan los distintos tipos de presentación de la información, en especial el paso de la gráfica correspondiente a una relación de proporcionalidad a cualquiera de los otros tres: verbal, numérico o algebraico. Se trata de evaluar también la capacidad de analizar una gráfica y relacionar el resultado de ese análisis con el significado de las variables representadas.</p>
Modelado de situaciones cotidianas	<p><i>4. Reconocer y describir figuras planas, utilizar sus propiedades para clasificarlas y aplicar el conocimiento geométrico adquirido para interpretar y describir el mundo físico, haciendo uso de la terminología adecuada.</i></p> <p>Se pretende comprobar la capacidad de utilizar los conceptos básicos de la geometría para abordar diferentes situaciones y problemas de la vida cotidiana.</p> <p><i>6. Organizar e interpretar informaciones diversas mediante tablas y gráficas, e identificar relaciones de dependencia en situaciones cotidianas.</i></p> <p>Este criterio pretende valorar la capacidad de identificar las variables que intervienen en una situación cotidiana, la relación de dependencia entre ellas y visualizarla gráficamente.</p>	<p><i>1. Utilizar números enteros, fracciones, decimales y porcentajes sencillos, sus operaciones y propiedades, para recoger, transformar e intercambiar información y resolver problemas relacionados con la vida diaria.</i></p> <p><i>2. Identificar relaciones de proporcionalidad numérica y geométrica y utilizarlas para resolver problemas en situaciones de la vida cotidiana.</i></p> <p>Se trata, asimismo, de utilizar diferentes estrategias (empleo de tablas, obtención y uso de la constante de proporcionalidad, reducción a la unidad, etc.) para obtener elementos desconocidos en un problema a partir de otros conocidos en situaciones de la vida real en las que existan relaciones de proporcionalidad.</p>

Métodos de resolución y errores en problemas de funciones lineales y afines del alumnado de 3º ESO del aula ordinaria y del aula de excelencia

1º ciclo ESO		
Descriptor	Criterios de evaluación 1º	Criterios de evaluación 2º
Uso de tecnologías	-	-

2º ciclo ESO			
Descriptor	Criterios de evaluación 3º	Criterios de evaluación 4º Opción Ciencias y Tecnología	Criterios de evaluación 4º Opción Ciencias Sociales
Proporcionalidad	-	-	<p>2. Aplicar porcentajes y tasas a la resolución de problemas cotidianos y financieros, valorando la oportunidad de utilizar la hoja de cálculo en función de la cantidad y complejidad de los números.</p> <p>Este criterio va dirigido a comprobar la capacidad para aplicar porcentajes, tasas, aumentos y disminuciones porcentuales a problemas vinculados a situaciones financieras habituales y a valorar la capacidad de utilizar las tecnologías de la información para realizar los cálculos, cuando sea preciso.</p>
Funciones: álgebra	<p>2. Expresar mediante el lenguaje algebraico una propiedad o relación dada mediante un enunciado y observar regularidades en secuencias numéricas obtenidas de situaciones reales mediante la obtención de la ley de formación y la fórmula correspondiente, en casos sencillos.</p> <p>A través de este criterio, se pretende comprobar la capacidad de extraer la información</p>	<p>2. Representar y analizar situaciones y estructuras matemáticas utilizando símbolos y métodos algebraicos para resolver problemas.</p> <p>Este criterio va dirigido a comprobar la capacidad de usar el álgebra simbólica para representar y explicar relaciones matemáticas y utilizar sus métodos en la resolución de problemas mediante inecuaciones, ecuaciones y sistemas.</p>	<p>3. Resolver problemas de la vida cotidiana en los que se precise el planteamiento y resolución de ecuaciones de primer y segundo grado o de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas.</p> <p>Este criterio va dirigido a comprobar que el alumno está preparado para aplicar las técnicas de manipulación de expresiones literales para resolver problemas que puedan ser traducidos previamente en forma de ecuaciones y sistemas.</p>

2º ciclo ESO			
Descriptor	Criterios de evaluación 3º	Criterios de evaluación 4º Opción Ciencias y Tecnología	Criterios de evaluación 4º Opción Ciencias Sociales
	relevante de un fenómeno para transformarla en una expresión algebraica. En lo referente al tratamiento de pautas numéricas, se valora si se está capacitado para analizar regularidades y obtener expresiones simbólicas, incluyendo formas iterativas y recursivas.		
Funciones: geometría	-	-	-
Análisis de funciones, tablas de valores y gráficas	<p>5. Utilizar modelos lineales para estudiar diferentes situaciones reales expresadas mediante un enunciado, una tabla, una gráfica o una expresión algebraica.</p> <p>Este criterio valora la capacidad de analizar fenómenos físicos, sociales o provenientes de la vida cotidiana que pueden ser expresados mediante una función lineal, construir la tabla de valores, dibujar la gráfica utilizando las escalas adecuadas en los ejes y obtener la expresión algebraica de la relación. Se pretende evaluar también la capacidad para aplicar los medios técnicos al análisis de los aspectos más relevantes de una gráfica y extraer, de</p>	<p>4. Identificar relaciones cuantitativas en una situación y determinar el tipo de función que puede representarlas, y aproximar e interpretar la tasa de variación media a partir de una gráfica, de datos numéricos o mediante el estudio de los coeficientes de la expresión algebraica.</p> <p>Este criterio pretende evaluar la capacidad de discernir a qué tipo de modelo de entre los estudiados, lineal, cuadrático, de proporcionalidad inversa, exponencial o logarítmica, responde un fenómeno determinado y de extraer conclusiones razonables de la situación asociada al mismo, utilizando</p>	<p>6. Analizar tablas y gráficas que representen relaciones funcionales asociadas a situaciones reales para obtener información sobre su comportamiento.</p> <p>A la vista del comportamiento de una gráfica o de los valores numéricos de una tabla, se valorará la capacidad de extraer conclusiones sobre el fenómeno estudiado. Para ello será preciso la aproximación e interpretación de las tasas de variación a partir de los datos gráficos o numéricos.</p>

2º ciclo ESO			
Descriptor	Criterios de evaluación 3º	Criterios de evaluación 4º Opción Ciencias y Tecnología	Criterios de evaluación 4º Opción Ciencias Sociales
	ese modo, la información que permita profundizar en el conocimiento del fenómeno estudiado.	para su análisis, cuando sea preciso, las tecnologías de la información. Además, a la vista del comportamiento de una gráfica o de los valores numéricos de una tabla, se valorará la capacidad de extraer conclusiones sobre el fenómeno estudiado. Para ello será preciso la aproximación e interpretación de la tasa de variación media a partir de los datos gráficos, numéricos o valores concretos alcanzados por la expresión algebraica.	
Modelado de situaciones cotidianas	<i>3. Resolver problemas de la vida cotidiana en los que se precise el planteamiento y resolución de ecuaciones de primer y segundo grado o de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas.</i>	-	<p><i>2. Aplicar porcentajes y tasas a la resolución de problemas cotidianos y financieros, valorando la oportunidad de utilizar la hoja de cálculo en función de la cantidad y complejidad de los números.</i></p> <p>Este criterio va dirigido a comprobar la capacidad para aplicar porcentajes, tasas, aumentos y disminuciones porcentuales a problemas vinculados a situaciones financieras habituales y a valorar la capacidad de utilizar las tecnologías de la información para realizar los cálculos, cuando sea preciso.</p> <p><i>3. Resolver problemas de la vida cotidiana en los que se precise el planteamiento</i></p>

2º ciclo ESO			
Descriptor	Criterios de evaluación 3º	Criterios de evaluación 4º Opción Ciencias y Tecnología	Criterios de evaluación 4º Opción Ciencias Sociales
			y resolución de ecuaciones de primer y segundo grado o de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas.
Uso de tecnologías	<p>3. Resolver problemas de la vida cotidiana en los que se precise el planteamiento y resolución de ecuaciones de primer y segundo grado o de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas.</p> <p>La resolución algebraica no se plantea como el único método de resolución y se combina también con otros métodos numéricos y gráficos, mediante el uso adecuado de los recursos tecnológicos.</p>	<p>4. Identificar relaciones cuantitativas en una situación y determinar el tipo de función que puede representarlas, y aproximar e interpretar la tasa de variación media a partir de una gráfica, de datos numéricos o mediante el estudio de los coeficientes de la expresión algebraica.</p> <p>Este criterio pretende evaluar la capacidad de discernir a qué tipo de modelo de entre los estudiados, lineal, cuadrático, de proporcionalidad inversa, exponencial o logarítmica, responde un fenómeno determinado y de extraer conclusiones razonables de la situación asociada al mismo, utilizando para su análisis, cuando sea preciso, las tecnologías de la información.</p>	<p>2. Aplicar porcentajes y tasas a la resolución de problemas cotidianos y financieros, valorando la oportunidad de utilizar la hoja de cálculo en función de la cantidad y complejidad de los números.</p> <p>Este criterio va dirigido a comprobar la capacidad para aplicar porcentajes, tasas, aumentos y disminuciones porcentuales a problemas vinculados a situaciones financieras habituales y a valorar la capacidad de utilizar las tecnologías de la información para realizar los cálculos, cuando sea preciso.</p> <p>3. Resolver problemas de la vida cotidiana en los que se precise el planteamiento y resolución de ecuaciones de primer y segundo grado o de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas.</p> <p>La resolución algebraica no se plantea como el único método de resolución y se combina también con otros métodos numéricos y gráficos y mediante el uso adecuado de las tecnologías de la información.</p> <p>5. Identificar relaciones cuantitativas en una situación y determinar el tipo de función que puede</p>

2º ciclo ESO			
Descriptor	Criterios de evaluación 3º	Criterios de evaluación 4º Opción Ciencias y Tecnología	Criterios de evaluación 4º Opción Ciencias Sociales
			<p><i>representarlas.</i></p> <p>Este criterio pretende evaluar la capacidad de discernir a qué tipo de modelo de entre los estudiados, lineal, cuadrático o exponencial, responde un fenómeno determinado y de extraer conclusiones razonables de la situación asociada al mismo, utilizando para su análisis, cuando sea preciso, las tecnologías de la información.</p>

2.3. Criterios de evaluación en Bachillerato

Bachillerato Ciencias y Tecnología		
Descriptor	Criterios de evaluación 1º	Criterios de evaluación 2º
Proporcionalidad	-	-
Funciones: álgebra	<p><i>1. Utilizar correctamente los números reales y sus operaciones para presentar e intercambiar información; estimar los efectos de las operaciones sobre los números reales y sus representaciones gráfica y algebraica y resolver problemas extraídos de la realidad social y de la naturaleza que impliquen la utilización de ecuaciones e inecuaciones, así como interpretar los resultados obtenidos.</i></p> <p>También se debe valorar la capacidad para traducir algebraicamente una situación y llegar a su resolución, haciendo una interpretación de los resultados obtenidos.</p>	-
Funciones: geometría	<p><i>2. Transferir una situación real a una esquematización geométrica y aplicar las diferentes técnicas de resolución de triángulos para enunciar conclusiones, valorándolas e interpretándolas en su contexto real; así como, identificar las formas correspondientes a algunos lugares geométricos del plano, analizar sus propiedades métricas y construirlos a</i></p>	<p><i>2. Transcribir situaciones de la geometría a un lenguaje vectorial en tres dimensiones y utilizar las operaciones con vectores para resolver los problemas extraídos de ellas, dando una interpretación de las soluciones.</i></p> <p>La finalidad de este criterio es evaluar la capacidad para utilizar el lenguaje vectorial y las técnicas</p>

Bachillerato Ciencias y Tecnología		
Descriptor	Criterios de evaluación 1º	Criterios de evaluación 2º
	<p><i>partir de ellas.</i></p> <p>Se pretende evaluar la capacidad para representar geométricamente una situación planteada, eligiendo y aplicando adecuadamente las definiciones y transformaciones geométricas que permitan interpretar las soluciones encontradas; en especial, la capacidad para incorporar al esquema geométrico las representaciones simbólicas o gráficas auxiliares como paso previo al cálculo.</p>	<p>apropiadas en cada caso, como instrumento para la interpretación de fenómenos diversos. Se pretende valorar especialmente la capacidad para realizar transformaciones sucesivas con objetos geométricos en el espacio de tres dimensiones.</p> <p><i>3. Transcribir problemas reales a un lenguaje gráfico o algebraico, utilizar conceptos, propiedades y técnicas matemáticas específicas en cada caso para resolverlos y dar una interpretación de las soluciones obtenidas ajustada al contexto.</i></p> <p>Este criterio pretende evaluar la capacidad de representar un problema en lenguaje algebraico o gráfico y resolverlo aplicando procedimientos adecuados e interpretar críticamente la solución obtenida.</p> <p>Se trata de evaluar la capacidad para elegir y emplear las herramientas adquiridas en álgebra, geometría y análisis, y combinarlas adecuadamente.</p>
Análisis de funciones, tablas de valores y gráficas	<p><i>5. Utilizar los conceptos, propiedades y procedimientos adecuados para encontrar e interpretar características destacadas de funciones expresadas analítica y gráficamente.</i></p> <p>Se pretende comprobar con este criterio la capacidad de utilizar adecuadamente la terminología y los conceptos básicos del análisis para estudiar las características generales de las funciones y aplicarlas a la construcción de la gráfica de una función concreta.</p> <p>En especial, la capacidad para identificar regularidades, tendencias y tasas de variación, locales y globales, en el comportamiento de la función, reconocer las características propias de la familia y las particulares de la función, y estimar los cambios gráficos que se producen al modificar una constante en la expresión algebraica.</p>	-

Bachillerato Ciencias y Tecnología		
Descriptor	Criterios de evaluación 1º	Criterios de evaluación 2º
Modelado de situaciones cotidianas	<p>1. Utilizar correctamente los números reales y sus operaciones para presentar e intercambiar información; estimar los efectos de las operaciones sobre los números reales y sus representaciones gráfica y algebraica y resolver problemas extraídos de la realidad social y de la naturaleza que impliquen la utilización de ecuaciones e inecuaciones, así como interpretar los resultados obtenidos.</p> <p>También se debe valorar la capacidad para traducir algebraicamente una situación y llegar a su resolución, haciendo una interpretación de los resultados obtenidos.</p> <p>4. Identificar las funciones habituales dadas a través de enunciados, tablas o gráficas, y aplicar sus características al estudio de fenómenos naturales y tecnológicos. Este criterio pretende evaluar la capacidad para interpretar y aplicar a situaciones del mundo natural, geométrico y tecnológico, la información suministrada por el estudio de las funciones. Particularmente, se pretende comprobar la capacidad de traducir los resultados del análisis al contexto del fenómeno, estático o dinámico, y extraer conclusiones sobre su comportamiento local o global.</p>	-
Uso de tecnologías	-	-

Bachillerato Ciencias Sociales		
Descriptor	Criterios de evaluación 1º	Criterios de evaluación 2º
Proporcionalidad	-	-
Funciones: álgebra	<p>2. Transcribir a lenguaje algebraico o gráfico una situación relativa a las ciencias sociales y utilizar técnicas matemáticas apropiadas para resolver problemas reales, dando una interpretación de las soluciones obtenidas.</p> <p>Este criterio pretende evaluar la capacidad para traducir algebraica o gráficamente una situación y llegar a</p>	<p>2. Transcribir problemas expresados en lenguaje usual al lenguaje algebraico y resolverlos utilizando técnicas algebraicas determinadas: matrices, ecuaciones y programación lineal bidimensional, interpretando críticamente el significado de las soluciones obtenidas.</p> <p>Este criterio está dirigido a</p>

Bachillerato Ciencias Sociales		
Descriptor	Criterios de evaluación 1º	Criterios de evaluación 2º
	su resolución haciendo una interpretación contextualizada de los resultados obtenidos, más allá de la resolución mecánica de ejercicios que sólo necesiten la aplicación inmediata de una fórmula, un algoritmo o un procedimiento determinado.	comprobar la capacidad de utilizar con eficacia el lenguaje algebraico tanto para plantear un problema como para resolverlo, aplicando las técnicas adecuadas. No se trata de valorar la destreza a la hora de resolver de forma mecánica ejercicios de aplicación inmediata, sino de medir la competencia para seleccionar las estrategias y herramientas algebraicas; así como la capacidad de interpretar críticamente el significado de las soluciones obtenidas.
Funciones: geometría	-	-
Análisis de funciones, tablas de valores y gráficas	<p><i>4. Relacionar las gráficas de las familias de funciones con situaciones que se ajusten a ellas; reconocer en los fenómenos económicos y sociales las funciones más frecuentes e interpretar situaciones presentadas mediante relaciones funcionales expresadas en forma de tablas numéricas, gráficas o expresiones algebraicas.</i></p> <p>Se trata de evaluar la destreza para realizar estudios del comportamiento global de las funciones a las que se refiere el criterio: polinómicas, fundamentalmente de primer y segundo grado; exponenciales y logarítmicas; valor absoluto; parte entera y racionales sencillas con especial atención a la función de proporcionalidad inversa, sin necesidad de profundizar en el estudio de propiedades locales desde un punto de vista analítico. La interpretación, cualitativa y cuantitativa, a la que se refiere el enunciado exige apreciar la importancia de la selección de ejes, unidades, dominio y escalas.</p>	-
Modelado de situaciones cotidianas	<p><i>2. Transcribir a lenguaje algebraico o gráfico una situación relativa a las ciencias sociales y utilizar técnicas matemáticas apropiadas para resolver problemas reales, dando una interpretación de las soluciones obtenidas.</i></p> <p><i>4. Relacionar las gráficas de las</i></p>	<p><i>3. Analizar e interpretar fenómenos habituales en las ciencias sociales susceptibles de ser descritos mediante una función, a partir del estudio cualitativo y cuantitativo de sus propiedades más características.</i></p> <p>Este criterio pretende evaluar la capacidad para traducir al</p>

Métodos de resolución y errores en problemas de funciones lineales y afines del alumnado de 3º ESO del aula ordinaria y del aula de excelencia

Bachillerato Ciencias Sociales		
Descriptor	Criterios de evaluación 1º	Criterios de evaluación 2º
	<i>familias de funciones con situaciones que se ajusten a ellas; reconocer en los fenómenos económicos y sociales las funciones más frecuentes e interpretar situaciones presentadas mediante relaciones funcionales expresadas en forma de tablas numéricas, gráficas o expresiones algebraicas.</i>	lenguaje de las funciones determinados aspectos de las ciencias sociales y para extraer, de esta interpretación matemática, información que permita analizar con criterios de objetividad el fenómeno estudiado y posibilitar un análisis crítico a partir del estudio de las propiedades globales y locales de la función.
Uso de tecnologías	-	-

Capítulo 3 Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en los libros de texto y su relación con las funciones lineales y afines en el currículo vigente

En este capítulo se exponen diferentes tipos de ejercicios, problemas y cuestiones tipo en los libros de texto de 1º ESO a 1º Bachillerato (consultar los títulos de libros analizados en el apartado de *Referencias*) y su relación con las funciones lineales y afines en el currículo vigente.

3.1. Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en 1º ESO

Actividad tipo: X Ejercicio ☐ Problema ☐ Cuestión ☐ Situación.

Descripción: Se introduce el concepto de relación de proporcionalidad directa, explicando que dos magnitudes son directamente proporcionales si “al multiplicar una (doble, triple, etc.), la otra se multiplica de la misma manera (doble, triple, etc.)” y si “al dividir una (doble, triple, etc.), la otra se divide de la misma manera (doble, triple, etc.)”.

Ejemplo:

Proporcionalidad directa

(Colera, J., Gaztelu, I., 2007, página 162)

1 Lola ha comprado cinco cromos por cuarenta céntimos. Completa la tabla, sabiendo que todos los cromos de la colección tienen el mismo precio.

N.º DE CROMOS	1	2	3	4	5	6	10	15	20
COSTE (EUROS)					0,40				

Actividad tipo: X Ejercicio ☐ Problema ☐ Cuestión ☐ Situación.

Descripción: Cálculo de porcentajes de una cantidad, el porcentaje equivale a una fracción (tanto entre 100) y se multiplica por la cantidad. Para ello, en el propio ejercicio se indica la manera de proceder.

Ejemplo:

Porcentaje

(Colera, J., Gaztelu, I., 2007, página 171)

19 Calcula, multiplicando por un número decimal, como en el ejemplo.

• $15\% \text{ de } 80 = 80 \cdot 0,15 = 12$

a) 5% de 380

b) 12% de 175

c) 22% de 1 300

d) 64% de 750

Actividad tipo: X Ejercicio ☐ Problema ☐ Cuestión ☐ Situación.

Descripción: Cada cantidad es directamente proporcional a su porcentaje correspondiente. Se pueden plantear los ejercicios como “Cálculo de la parte”, “Cálculo del tanto por ciento” y como este ejercicio el “Cálculo del total” para lo cual se hace un esquema para indicar la manera de resolver el resto de apartados.

Ejemplo:

Porcentaje como proporción

(Colera, J., Gaztelu, I., 2007, página 173)

6 Reflexiona y calcula.

a) 35% de = 245

<u>TOTAL</u>	<u>PARTE</u>	
100	35	} $\frac{100}{x} = \frac{35}{245} \rightarrow x = \text{}$
x	245	

b) 5% de = 12 c) 15% de = 30

d) 18% de = 45 e) 32% de = 200

Actividad tipo: ☐ Ejercicio **X Problema** ☐ Cuestión ☐ Situación.

Descripción: El X% de un número Y_1 = otro número Y_2 . En el problema se pide el cálculo del número Y_1 .

Ejemplo:

Porcentajes

(Colera, J., Gaztelu, I., 2007, página 177)

38 ■■■ Un equipo de baloncesto ha ganado esta temporada el 65% de los encuentros disputados. Sabiendo que ha ganado 52 partidos, ¿cuántos encuentros ha jugado en total?



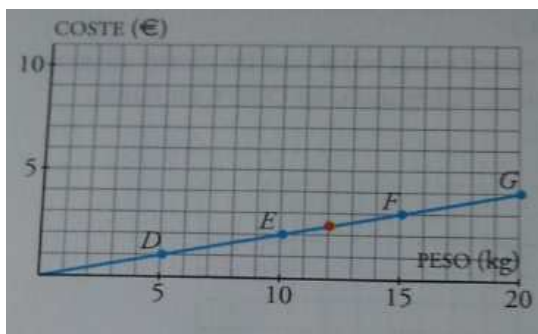
Actividad tipo: ☐ Ejercicio **X Problema** ☐ Cuestión ☐ Situación.

Descripción: Interpretación de gráficas y relación de dependencia entre dos variables, con el ejercicio se introduce la noción de función para representar dos variables que dependen entre sí.

Ejemplo:

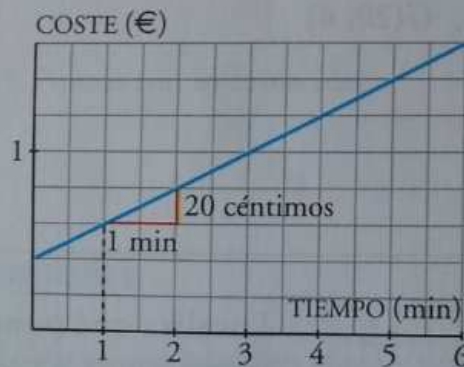
Interpretación de gráficas

(Colera, J., Gaztelu, I., 2007, página 262)



1. ¿Cuáles son las variables en la función anterior, que describe los precios de las bolsas de sal?

2. El coste de las llamadas telefónicas viene dado por la siguiente gráfica:



Describe la gráfica.

Actividad tipo: ☐ Ejercicio ☐ Problema **X Cuestión** ☐ Situación.

Descripción: Esta cuestión introduce la noción de proporcionalidad directa de 3 variables en lugar de 2 variables que es el concepto explicado en el tema. Comensales → Kilogramos → Meses, y no sólo Comensales → Kilogramos o Comensales → Meses.

Ejemplo:

Proporcionalidad compuesta

(Colera, J., Gaztelu, I., 2007, página 176)

24 ■■■ En un comedor escolar de 75 comensales, se han consumido 230 kilos de pescado en dos meses.

a) ¿Cuántos kilos de pescado consumirán 150 comensales en un mes?

b) ¿Cuántos kilos consumirán 150 comensales en tres meses?

3.2. Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en 2º ESO

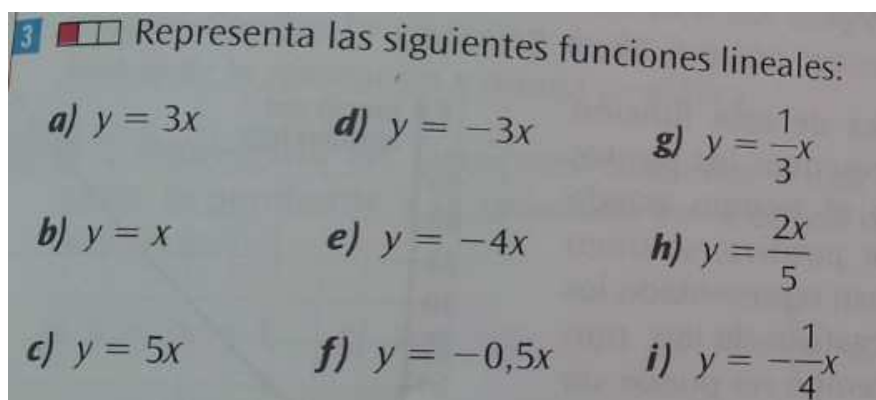
Actividad tipo: X Ejercicio ☐ Problema ☐ Cuestión ☐ Situación.

Descripción: Representación de funciones lineales con distintas pendientes; positivas y negativas, números enteros y fraccionarios. Para funciones afines igualmente se representan funciones con distintas pendientes y distintas ordenadas en el origen.

Ejemplo:

Representación de funciones lineales

(Uriondo, J.L., 2007, página 131)



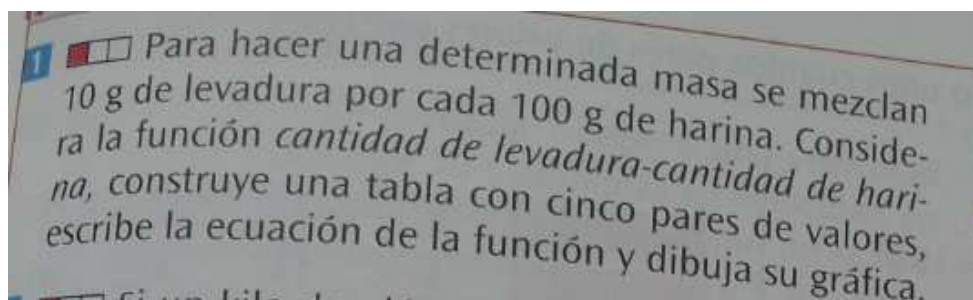
Actividad tipo: X Ejercicio ☐ Problema ☐ Cuestión ☐ Situación.

Descripción: A partir de unos datos de partida, se pide representar gráficamente una función, construir la tabla de valores y escribir la ecuación de la función que representa el enunciado del ejercicio.

Ejemplo:

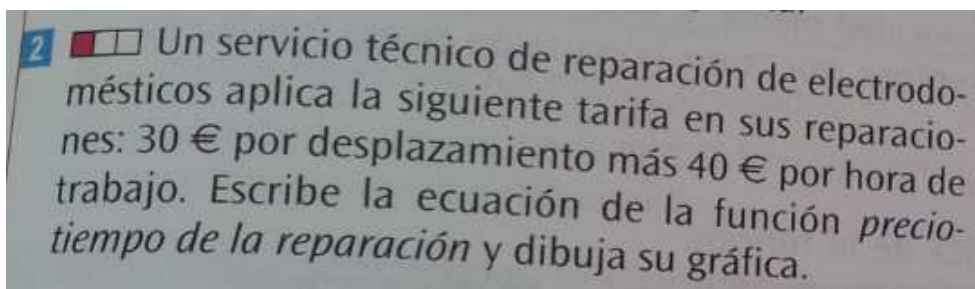
Representación de función lineal

(Uriondo, J.L., 2007, página 131)



Representación de función afín

(Uriondo, J.L., 2007, página 133)

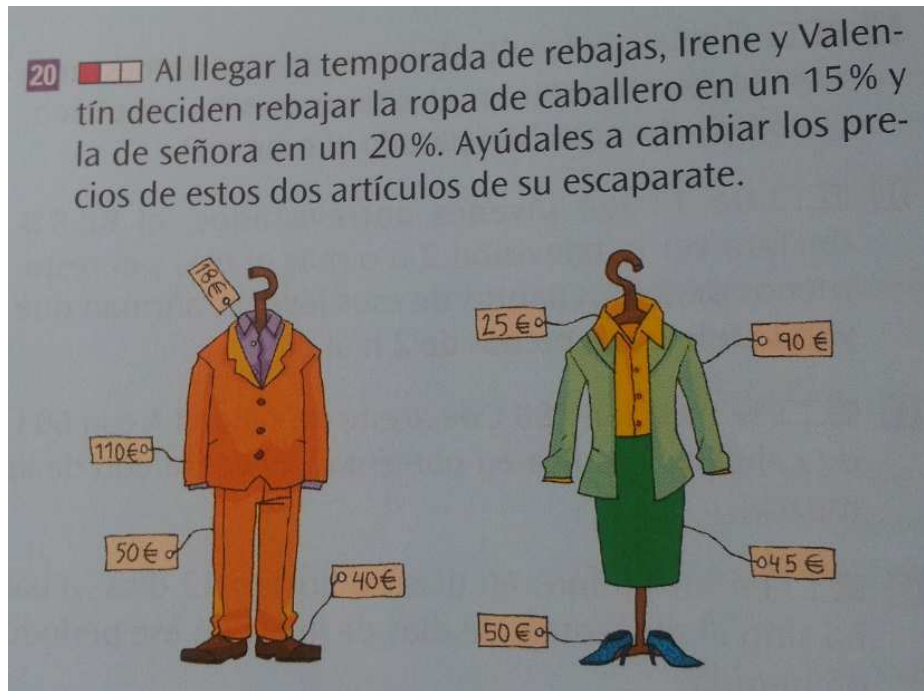


Actividad tipo: ☐ Ejercicio **X Problema** ☐ Cuestión ☐ Situación.

Descripción: Cálculo práctico con porcentajes. A partir de un porcentaje “de rebaja”, se calculan descuentos porcentuales de ciertas cantidades, “precio sin rebaja”, para hallar nuevos “precios rebajados”.

Ejemplo:

Descuentos porcentuales
(Uriondo, J.L., 2007, página 80)



Actividad tipo: ☐ Ejercicio **X Problema** ☐ Cuestión ☐ Situación.

Descripción: Aplicaciones de semejanza de triángulos a partir de dibujos, de esta manera se obtienen medidas de forma indirecta a partir de otras dadas.

Ejemplo:

Semejanza
(Uriondo, J.L., 2007, página 179)




Actividad tipo: ☐ Ejercicio ☐ Problema ☒ **Cuestión** ☐ Situación.

Descripción: Función lineal y afín representadas gráficamente por rectas. Noción de paralelismo entre rectas cuando éstas tienen la misma pendiente.

Ejemplo:

Rectas paralelas

(Uriondo, J.L., 2007, página 141)

37  ¿Qué relación tiene que haber entre las pendientes de dos rectas que son paralelas? Comprueba tu respuesta representando en los mismos ejes estas tres rectas, dos de las cuales son paralelas:

a) $y = 3x + 2$ **b)** $y = x + 1$ **c)** $y = 3x$


Actividad tipo: ☐ Ejercicio ☐ Problema ☒ **Cuestión** ☐ Situación.

Descripción: Razonamiento para indicar si dos triángulos son semejantes a partir de una premisa dada.

Ejemplo:

Semejanza en triángulos

(Uriondo, J.L., 2007, página 178)

43  El ángulo comprendido por los lados iguales de un triángulo isósceles mide 30° . Si los ángulos iguales de otro triángulo isósceles miden 75° , ¿se puede asegurar que ambos triángulos son semejantes?

Semejanza en triángulos

(Uriondo, J.L., 2007, página 179)

8. Justifica la siguiente afirmación: «Si unimos los puntos medios de dos lados de un triángulo equilátero, se obtiene otro triángulo equilátero».

3.3. Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en 3º ESO

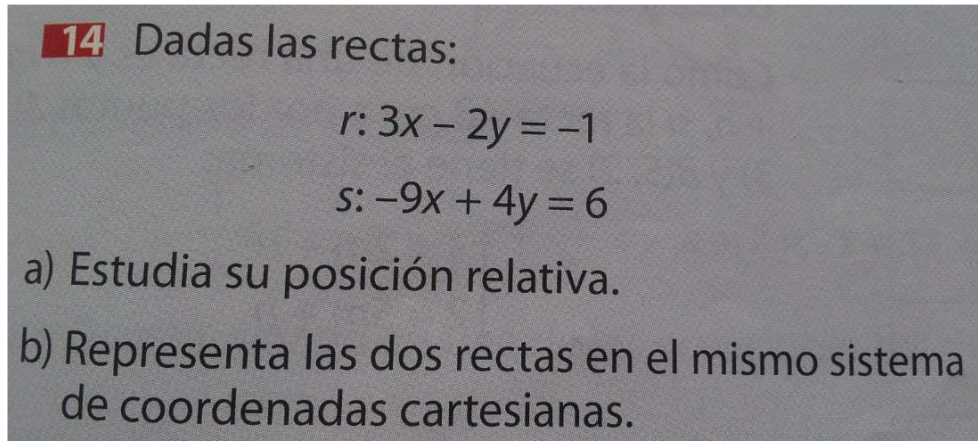
Actividad tipo: X Ejercicio ☐ Problema ☐ Cuestión ☐ Situación.

Descripción: Se pide hacer el estudio de la posición relativa de dos rectas analíticamente, posteriormente se representan ambas rectas y se puede comprobar el resultado gráficamente.

Ejemplo:

Posición relativa de dos rectas

(Martínez, B., Montesinos, P., González, F., López, C., 2007, página 141)



14 Dadas las rectas:

$$r: 3x - 2y = -1$$
$$s: -9x + 4y = 6$$

a) Estudia su posición relativa.

b) Representa las dos rectas en el mismo sistema de coordenadas cartesianas.

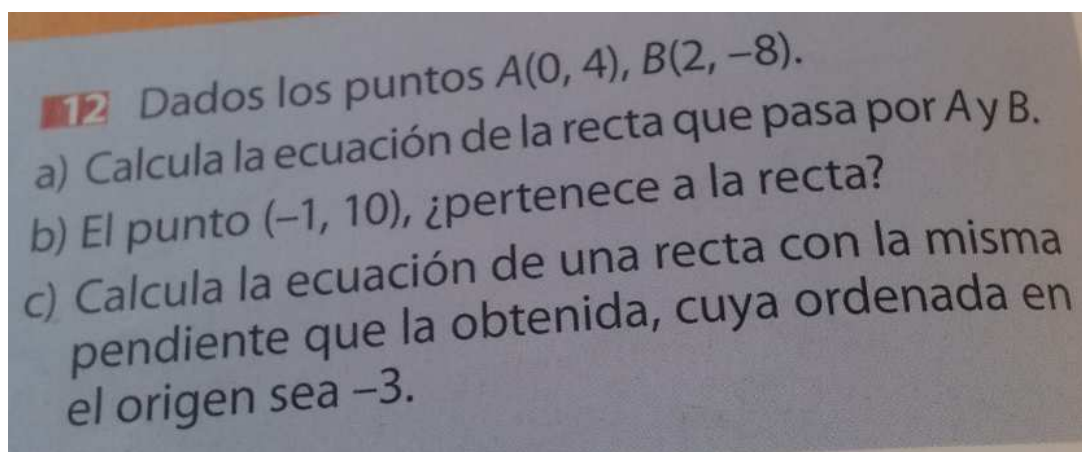
Actividad tipo: X Ejercicio ☐ Problema ☐ Cuestión ☐ Situación.

Descripción: Cálculo de una recta a partir de dos puntos, pertenencia de un punto a la recta y cálculo de recta a partir de pendiente y ordenada en el origen.

Ejemplo:

Obtención de la ecuación de la recta

(Martínez, B., Montesinos, P., González, F., López, C., 2007, página 138)



12 Dados los puntos $A(0, 4)$, $B(2, -8)$.

a) Calcula la ecuación de la recta que pasa por A y B.

b) El punto $(-1, 10)$, ¿pertenece a la recta?

c) Calcula la ecuación de una recta con la misma pendiente que la obtenida, cuya ordenada en el origen sea -3 .

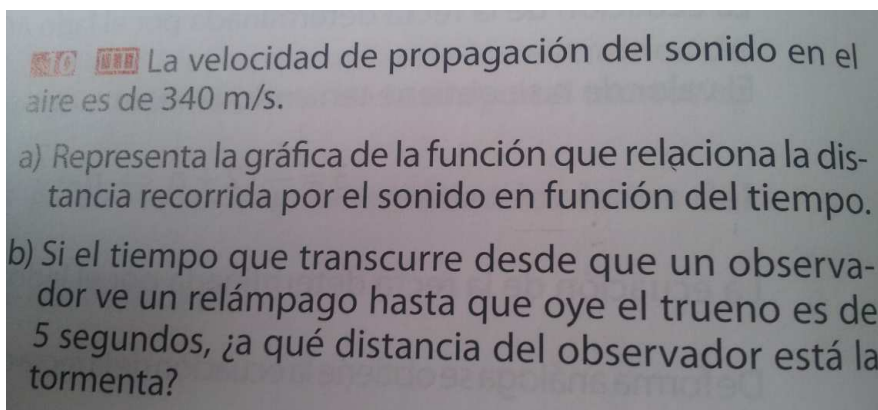
Actividad tipo: ☐ Ejercicio **X Problema** ☐ Cuestión ☐ Situación.

Descripción: En el primer apartado se pide que se haga la representación gráfica de la función lineal de la propagación del sonido. En el siguiente apartado se quiere que se interprete y utilice la expresión algebraica de la función para obtener un punto de la recta.

Ejemplo:

Función lineal: propagación del sonido. Interpretación de un punto de la recta

(Martínez, B., Montesinos, P., González, F., López, C., 2007, página 144)



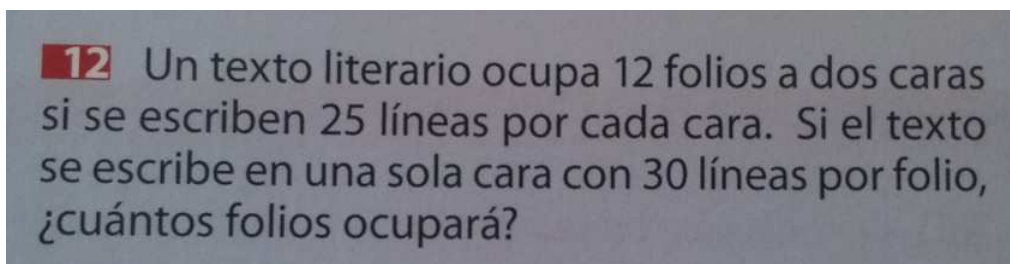
Actividad tipo: ☐ Ejercicio **X Problema** ☐ Cuestión ☐ Situación.

Descripción: Cálculo de proporcionalidad compuesta (3 variables: folios, caras y líneas) y de repartos proporcionales.

Ejemplo:

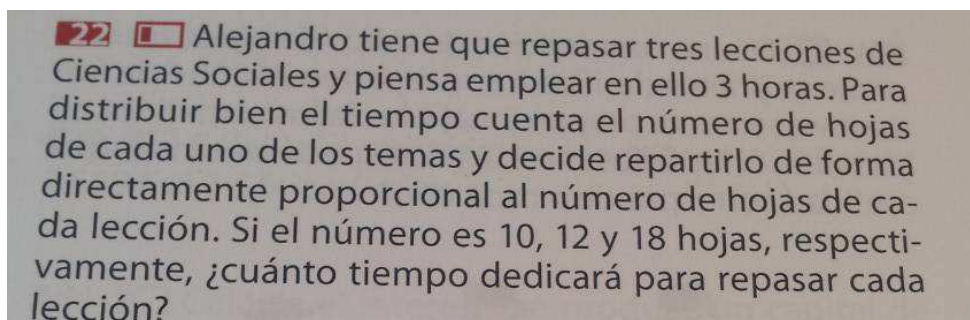
Proporcionalidad compuesta

(Martínez, B., Montesinos, P., González, F., López, C., 2007, página 83)



Repartos proporcionales

(Martínez, B., Montesinos, P., González, F., López, C., 2007, página 91)



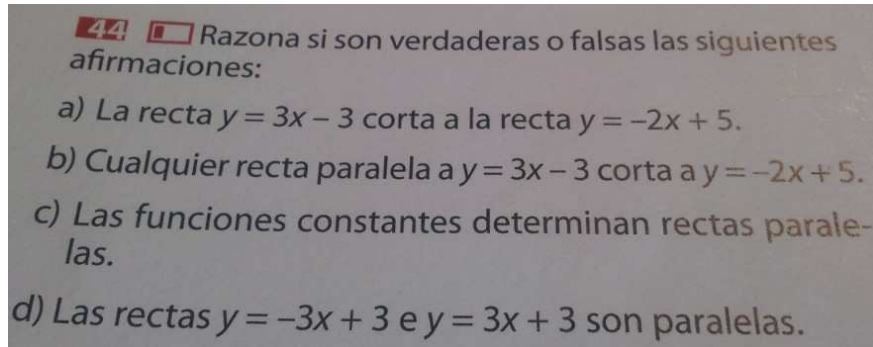
Actividad tipo: ☐ Ejercicio ☐ Problema ☒ **Cuestión** ☐ Situación.

Descripción: Razonamiento de posición relativa de rectas atendiendo a sus pendientes sin necesidad de resolver analíticamente.

Ejemplo:

Posición relativa

(Martínez, B., Montesinos, P., González, F., López, C., 2007, página 147)



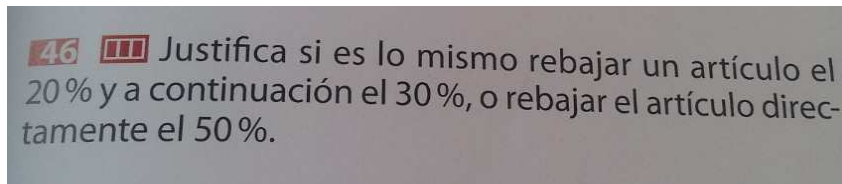
Actividad tipo: ☐ Ejercicio ☐ Problema ☒ **Cuestión** ☐ Situación.

Descripción: Razonamiento acerca de si los porcentajes se suman o no conforme se van aplicando sucesivamente.

Ejemplo:

Porcentajes

(Martínez, B., Montesinos, P., González, F., López, C., 2007, página 93)



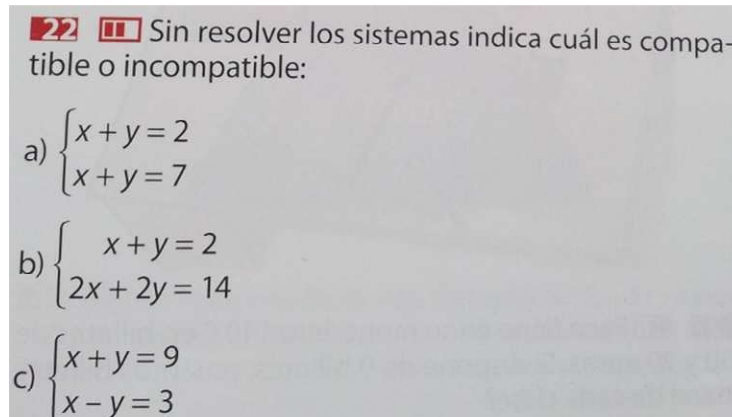
Actividad tipo: ☐ Ejercicio ☐ Problema ☒ **Cuestión** ☐ Situación.

Descripción: Razonamiento acerca de compatibilidad e incompatibilidad de sistemas de ecuaciones.

Ejemplo:

Sistemas de 2 ecuaciones lineales con 2 incógnitas

(Martínez, B., Montesinos, P., González, F., López, C., 2007, página 73)



3.4. Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en 4º ESO, Ciencias y Tecnología

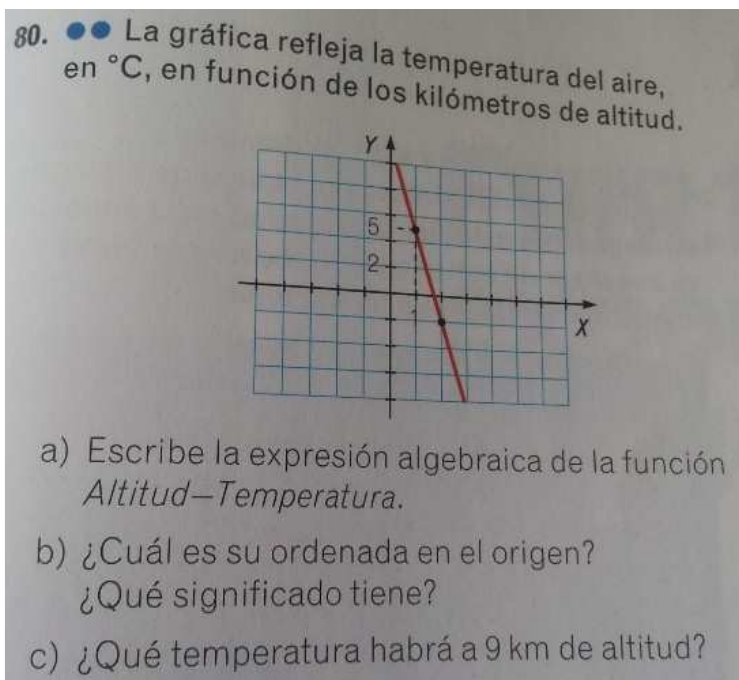
Actividad tipo: X Ejercicio ☐ Problema ☐ Cuestión ☐ Situación.

Descripción: Este ejercicio requiere el cálculo de la expresión algebraica de una función a partir de una recta representada en una gráfica. Además, se precisa que el alumnado entienda el significado de la ordenada en el origen e interpretar los puntos de una recta en relación con las variables de la función (altitud y temperatura).

Ejemplo:

Función afín

(Álvarez, M.D., Gaztelu, A.M., González, A., Hernández, J., Miranda, A.Y., Moreno, M.R., Parra, S., Redal, E.J., Redondo, M., Redondo, R., Sánchez, M.T., Santos, T., Serrano, E., 2008, página 195)



Actividad tipo: X Ejercicio ☐ Problema ☐ Cuestión ☐ Situación.

Descripción: A partir de la ecuación paramétrica de una recta, se pide calcular la ecuación continua de una recta para lo cual deben despejar el parámetro t de las dos expresiones e igualarlas. Ambas ecuaciones vienen dadas a partir de un punto y un vector director de la recta.

Ejemplo:

Ecuación continua y ecuación paramétrica

(Álvarez, M.D., Gaztelu, A.M., González, A., Hernández, J., Miranda, A.Y., Moreno, M.R., Parra, S., Redal, E.J., Redondo, M., Redondo, R., Sánchez, M.T., Santos, T., Serrano, E., 2008, página 150)

22 Halla la ecuación continua de la siguiente recta expresada en forma paramétrica.

$$\left. \begin{array}{l} x = 2 - 3t \\ y = 2t \end{array} \right\}$$

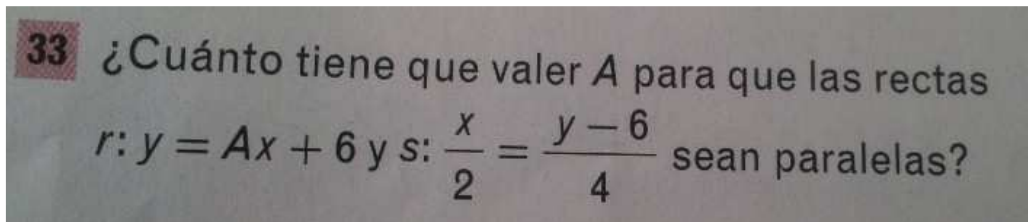
Actividad tipo: ☐ Ejercicio **X Problema** ☐ Cuestión ☐ Situación.

Descripción: A partir de las rectas dadas en forma continua y explícita, se pide calcular el valor de un parámetro para que las rectas sean paralelas, es decir que tengan la misma pendiente.

Ejemplo:

Ecuaciones de la recta y posición relativa

(Álvarez, M.D., Gaztelu, A.M., González, A., Hernández, J., Miranda, A.Y., Moreno, M.R., Parra, S., Redal, E.J., Redondo, M., Redondo, R., Sánchez, M.T., Santos, T., Serrano, E., 2008, página 153)



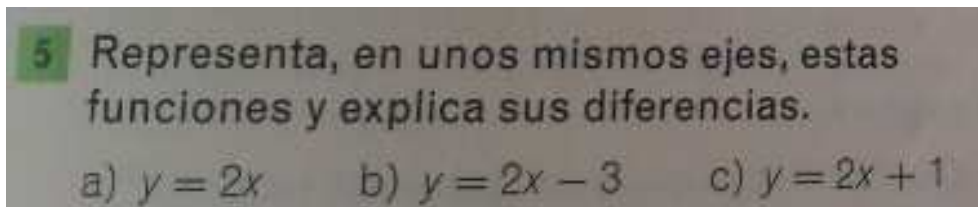
Actividad tipo: ☐ Ejercicio **X Problema** ☐ Cuestión ☐ Situación.

Descripción: En el problema se pide representar las funciones polinómicas de primer grado para explicar sus diferencias en cuanto a la ordenada en el origen ya que las tres rectas son paralelas.

Ejemplo:

Funciones polinómicas de primer grado

(Álvarez, M.D., Gaztelu, A.M., González, A., Hernández, J., Miranda, A.Y., Moreno, M.R., Parra, S., Redal, E.J., Redondo, M., Redondo, R., Sánchez, M.T., Santos, T., Serrano, E., 2008, página 179)



Actividad tipo: ☐ Ejercicio ☐ Problema **X Cuestión** ☐ Situación.

Descripción: Se pide al alumnado que investigue en función de los parámetros indicados la clasificación del sistema de ecuaciones.

Ejemplo:

Sistemas de ecuaciones

(Álvarez, M.D., Gaztelu, A.M., González, A., Hernández, J., Miranda, A.Y., Moreno, M.R., Parra, S., Redal, E.J., Redondo, M., Redondo, R., Sánchez, M.T., Santos, T., Serrano, E., 2008, página 107)

67. ●●● Generaliza la clasificación de sistemas de ecuaciones en función de los coeficientes y los términos independientes.

$$\left. \begin{array}{l} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{array} \right\}$$

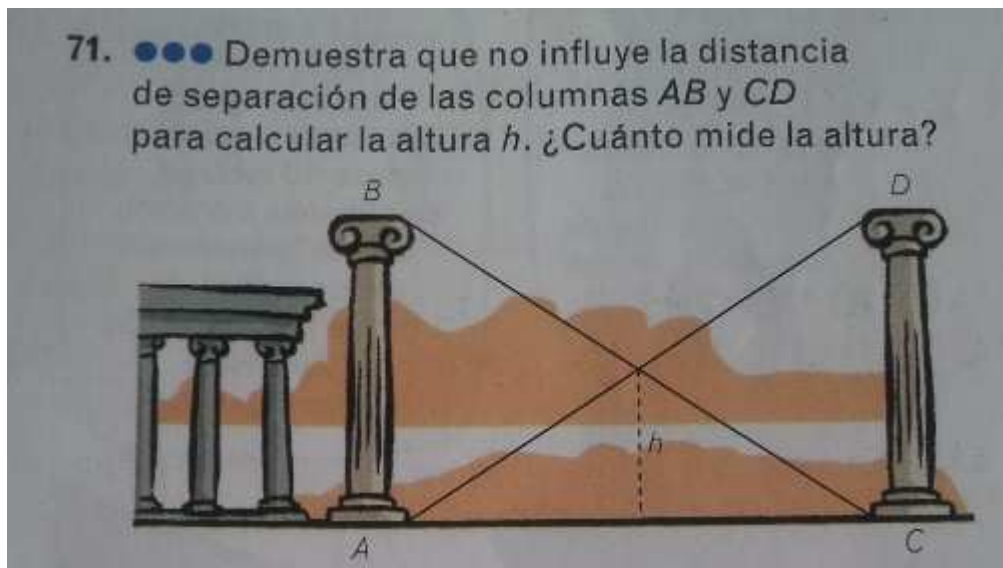
Actividad tipo: ☐ Ejercicio ☐ Problema ☒ Cuestión ☐ Situación.

Descripción: Se requiere que el estudiante investiga en la aplicación de la semejanza en triángulos para determinar que no influye la separación entre las columnas para calcular la altura indicada.

Ejemplo:

Aplicación semejanza de triángulos

(Álvarez, M.D., Gaztelu, A.M., González, A., Hernández, J., Miranda, A.Y., Moreno, M.R., Parra, S., Redal, E.J., Redondo, M., Redondo, R., Sánchez, M.T., Santos, T., Serrano, E., 2008, página 123)



3.5. Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en 4º ESO, Ciencias Sociales

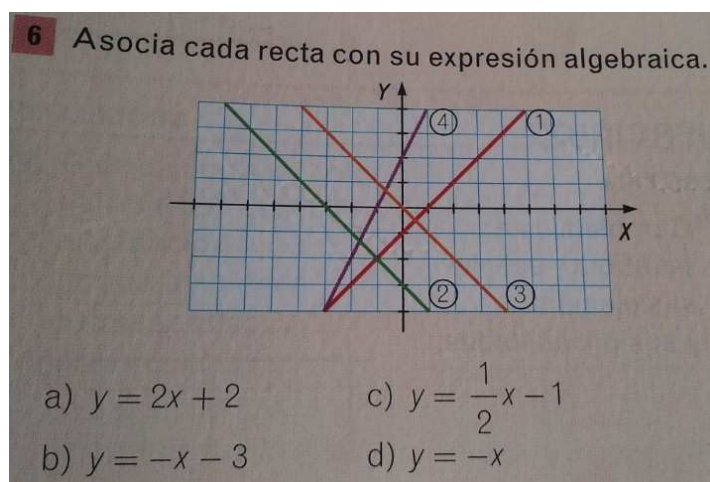
Actividad tipo: ☒ Ejercicio ☐ Problema ☐ Cuestión ☐ Situación.

Descripción: Se requiere asociar las rectas representadas gráficamente a expresiones de funciones lineales (o polinómicas de grado 1).

Ejemplo:

Función polinómica de primer grado

(Álvarez, M.D., Gaztelu, A.M., González, A., Hernández, J., Miranda, A.Y., Moreno, M.R., Parra, S., Redal, E.J., Redondo, M., Redondo, R., Sánchez, M.T., Santos, T., Serrano, E., 2008, página 193)



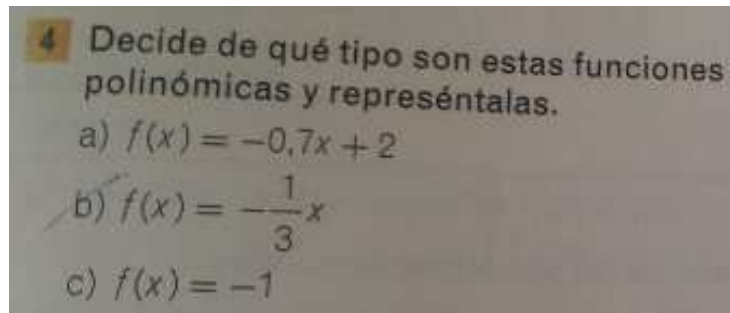
Actividad tipo: ☐ Ejercicio ☒ **Problema** ☐ Cuestión ☐ Situación.

Descripción: Se requiere distinguir entre funciones lineales, afines y constantes atendiendo a la expresión algebraica de la función. Una vez representadas, el estudiante puede comprobar el resultado.

Ejemplo:

Funciones lineales, afines y constantes

(Álvarez, M.D., Gaztelu, A.M., González, A., Hernández, J., Miranda, A.Y., Moreno, M.R., Parra, S., Redal, E.J., Redondo, M., Redondo, R., Sánchez, M.T., Santos, T., Serrano, E., 2008, página 193)



Actividad tipo: ☐ Ejercicio ☐ Problema ☒ **Cuestión** ☐ Situación.

Descripción: Los estudiantes tienen que investigar sobre cómo comparar errores para lo cual deben utilizar la herramienta de cálculo y comparación de porcentajes.

Ejemplo:

Porcentajes

(Álvarez, M.D., Gaztelu, A.M., González, A., Hernández, J., Miranda, A.Y., Moreno, M.R., Parra, S., Redal, E.J., Redondo, M., Redondo, R., Sánchez, M.T., Santos, T., Serrano, E., 2008, página 85)

97. ●●● Al medir una serie de longitudes, los alumnos han obtenido varios resultados y han cometido un error que viene expresado en la siguiente tabla.

Alumno	Medida	Error
Enrique	18,5 m	90 cm
Félix	5 m	13 cm
Carlos	12 m	16 cm
Pilar	10,8 m	80 cm
Domingo	3 m	10 cm

¿Quién crees que ha cometido un mayor error?

3.6. Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en 1º Bachillerato, Ciencias y Tecnología

Actividad tipo: X Ejercicio ☐ Problema ☐ Cuestión ☐ Situación.

Descripción: Cálculo y representación de la recta de Tukey y rectas de regresión en distribuciones bidimensionales.

Ejemplo:

Recta de Tukey y recta de regresión

(Vizmanos, J.R., Hernández, J., Alcaide, F., 2008, página 327)

14. Sea la variable bidimensional dada por la siguiente tabla.

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Y	5	6	8	11	1	13	14	14	17

- Halla la recta de Tukey.
- Halla la recta de regresión de Y sobre X .
- Representa la nube de puntos y las dos rectas obtenidas.

Actividad tipo: ☐ Ejercicio **X Problema** ☐ Cuestión ☐ Situación.

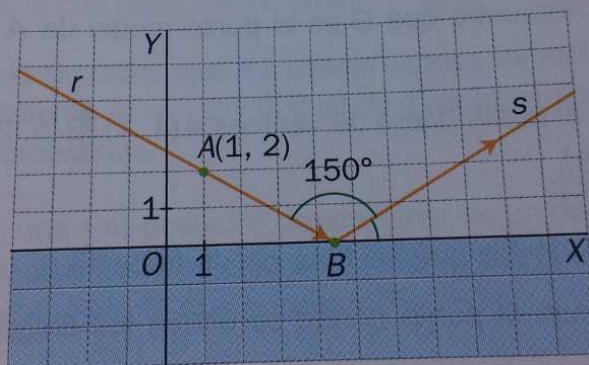
Descripción: A partir de unas premisas (punto y ángulos) se pide el cálculo de dos rectas. Para ello, el problema contiene una gráfica que ayuda a visualizar la geometría del enunciado.

Ejemplo:

Ecuaciones de la recta

(Vizmanos, J.R., Hernández, J., Alcaide, F., 2008, página 134)

82 Un rayo de luz r , que pasa por el punto $A(1, 2)$, incide sobre el eje de abscisas y se refleja formando con él un ángulo de 150° .



Halla las ecuaciones de los rayos incidente y reflejado.

Actividad tipo: ☐ Ejercicio ☒ **Problema** ☐ Cuestión ☐ Situación.

Descripción: A partir de un porcentaje se pide el cálculo de un ángulo y el uso del concepto de triángulos semejantes.

Ejemplo:

Trigonometría

(Vizmanos, J.R., Hernández, J., Alcaide, F., 2008, página 91)

75 Una señal de tráfico indica que la inclinación de un tramo de carretera es del 8%, lo cual quiere decir que en un desplazamiento horizontal de 100 m se realiza un ascenso de 8 m de altura.



a) ¿Qué ángulo forma la carretera con la horizontal?
b) ¿Cuántos metros hay que recorrer para ascender 125?

Actividad tipo: ☐ Ejercicio ☐ Problema ☒ **Cuestión** ☐ Situación.

Descripción: Comprobación y justificación de que una expresión contiene a todas las rectas secantes de un haz con un determinado vértice.

Ejemplo:

Haz de rectas secantes

(Vizmanos, J.R., Hernández, J., Alcaide, F., 2008, página 135)

106 La expresión $kx + 2(k + 1)y + 2 = 0$ representa una recta para cada valor real de k . Comprueba que todas estas rectas forman un haz de rectas secantes y calcula su vértice. ¿Están todas las rectas del haz incluidas en la expresión?

3.7. Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en 1º Bachillerato, Ciencias Sociales

Actividad tipo: ☐ Ejercicio **X Problema** ☐ Cuestión ☐ Situación.

Descripción: Problema en el que se tiene que utilizar la noción de interés simple, capital inicial y capital final.

Ejemplo:

Matemáticas financieras

(Vizmanos, J.R., Hernández, J., Alcaide, F., 2008, página 34)

16. Un capital de 6500 euros se quiere aumentar en un 20%. Para ello se coloca a interés simple del 4% anual. ¿Cuánto tiempo debe permanecer depositado este capital?

Actividad tipo: **X Ejercicio** ☐ Problema ☐ Cuestión ☐ Situación.

Descripción: En este ejercicio se plantean dos funciones (oferta y demanda) representadas por dos rectas para distinguir cuál es cuál y hallar el punto de equilibrio entre la oferta y demanda que es el punto de corte en el coincide la x y la y de ambas funciones. Se puede hallar con la gráfica o planteando un sistema de ecuaciones.

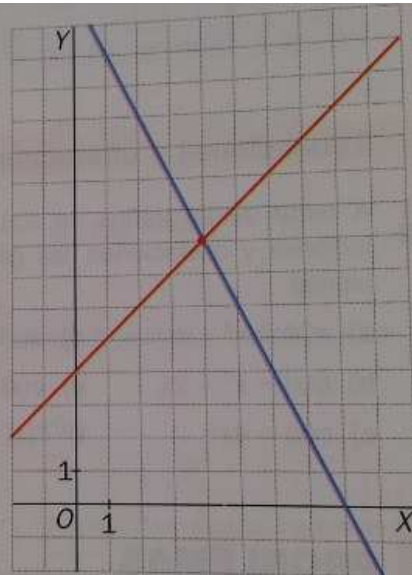
Ejemplo:

Funciones lineales a través de rectas

(Vizmanos, J.R., Hernández, J., Alcaide, F., 2008, página 132)

35 Se ha hecho un estudio de mercado en el que las curvas de oferta y demanda de un determinado producto vienen dadas por las funciones de la ilustración.

- Identifica cuál corresponde a la función de la oferta y cuál a la de la demanda.
- Si el punto de corte de ambas curvas es el punto de equilibrio al que se aproxima el mercado, hálalo.



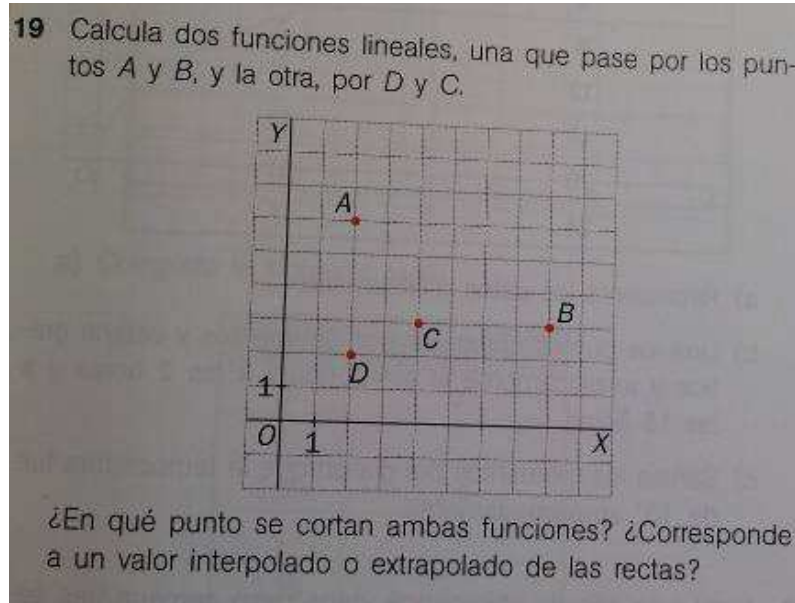
Actividad tipo: X Ejercicio ☐ Problema ☐ Cuestión ☐ Situación.

Descripción: En este ejercicio se plantean el cálculo de dos funciones lineales. A partir de las rectas, se pide hallar su punto de corte a través de un proceso de extrapolación/interpolación.

Ejemplo:

Interpolación - extrapolación lineal

(Vizmanos, J.R., Hernández, J., Alcaide, F., 2008, página 147)



Actividad tipo: ☐ Ejercicio X Problema ☐ Cuestión ☐ Situación.

Descripción: A través de la función lineal que relaciona el espacio con el tiempo (espacio=velocidad x tiempo), se pide que planteen las ecuaciones algebraicas y que resuelvan el sistema para hallar la solución del problema.

Ejemplo:

Ecuaciones y sistemas de ecuaciones

(Vizmanos, J.R., Hernández, J., Alcaide, F., 2008, página 88)

63 Un coche sale de A en dirección a B a una velocidad de 80 km/h. Tres minutos después, otro coche sale de B en dirección a A a una velocidad de 100 km/h. Calcula el punto de encuentro de los dos coches si A y B distan 22 km.

Actividad tipo: ☐ Ejercicio ☐ Problema ☒ **Cuestión** ☐ Situación.

Descripción: Relación existente entre sistemas de funciones lineales (rectas) y sistemas de inecuaciones (regiones definidas por rectas).

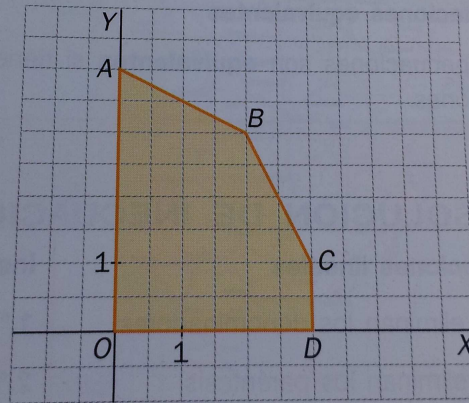
Ejemplo:

Sistemas de inecuaciones

(Vizmanos, J.R., Hernández, J., Alcaide, F., 2008, página 107)

59 La figura muestra la solución del sistema de inecuaciones

$$\begin{cases} ax + by \leq c \\ dx + ey \leq f \\ y \geq 0 \\ 0 \leq x \leq g \end{cases}$$



Encuentra valores posibles para a , b , c , d , e , f y g .

Capítulo 4 Resultados

En los capítulos anteriores se han expuesto los contenidos y criterios de evaluación en relación a las funciones lineales y afines en el currículo vigente. Además, se ha presentado una selección actividades presentes en los libros de texto relacionados con el contenido matemático objeto de estudio. En este capítulo se indican las ausencias y presencias de contenidos tanto en el currículo como en los diferentes libros de texto estudiados así como conclusiones respecto a la coherencia de los libros de texto en relación con el currículo.

4.1. Ausencias y presencias en el currículo y en los libros de texto

En el capítulo anterior se ha presentado una colección de actividades en la que se puede constatar que existen numerosos ejercicios, problemas y cuestiones relacionados con las funciones lineales y afines a lo largo de todos los libros. Además, más allá del plano teórico y de la abstracción de los contenidos, todos los libros de texto presentan numerosas actividades que modelizan situaciones de la vida cotidiana tal y como exige el currículo. Sin embargo, la proporción de ejercicios y problemas frente a las cuestiones es muy elevada; no se detectan suficientes cuestiones abiertas en las que el alumnado tenga que desarrollar e investigar más allá de aplicar los contenidos tratados en las partes teóricas del libro.

Analizando los libros de texto de secundaria y bachillerato con el libro de referencia de nivel universitario se pueden encontrar ciertas similitudes y diferencias (consultar en apartado de *Referencias* el título del libro del saber el cual ha sido recomendado por la directora del presente Trabajo Fin de Master, Dra. Camino Leránoz Istúriz). Desde el punto de vista del aprendizaje, todos ellos combinan la teoría con ejemplos para de esta manera proporcionar una mejor adquisición de conocimientos y que éstos se puedan aplicar. Además ofrecen ejercicios resueltos para poder practicar y consultar si en algún momento se tienen dudas. Asimismo, todos ellos al finalizar el contenido, proponen ejercicios para resolver, los cuales no están solucionados. A diferencia del libro de referencia del saber, los libros de texto indican en la propia actividad el nivel de dificultad de la misma (bajo, medio o alto). Sin embargo, como es de esperar, los conceptos se tratan con más generalidad y profundidad en el libro universitario mientras que en los libros de texto se estudia a través de problemas cotidianos y apoyándose continuamente en representaciones gráficas. Otra de las diferencias, es que si bien en los libros escolares se diferencia entre función lineal y función afín, en el libro universitario no se trata de este modo y se engloban conjuntamente como aplicaciones lineales.

Tanto en Secundaria como en Bachillerato los temas se dividen en aritmética, álgebra, funciones, geometría y estadística, y el concepto de función está relacionado con todos ellos. A pesar de ello, ni en el currículo y por tanto tampoco los libros de texto, resaltan esta relación por lo que los contenidos resultan estancos e independientes. Esta atomización de la enseñanza provoca que los estudiantes no sean capaces de relacionar por ejemplo la resolución de un sistema de ecuaciones con las representaciones gráficas de dos funciones o la proporcionalidad con la semejanza de figuras geométricas. Por este motivo, el profesor juega un papel clave en ligar los contenidos y aportar el significado global de las matemáticas y en concreto de las funciones.

Respecto a la continuidad de los contenidos, se observa que en todos los niveles educativos se repasa lo visto en el curso previo añadiendo conceptos que resultan novedosos para el alumnado.

Esta continuidad en los contenidos introduciendo poco a poco nuevos, se denomina aprendizaje en espiral, al igual que los es currículo que también es designado como currículo en espiral.

4.2. Coherencia de los libros de texto en relación con el currículo

A lo largo de los libros de texto de los diferentes cursos, se observan correspondencias respecto a lo expuesto en el currículo pero también se aprecian algunas ausencias. Entre las presencias de contenidos que no están incluidos en el currículo cabe destacar el concepto de proporcionalidad compuesta. Este contenido no aparece explícitamente en el currículo pero sin embargo se expone desde 1º ESO hasta 3º ESO. Además, según el currículo, en 3º ESO no se debe tratar el tema de proporcionalidad, sin embargo, el libro de texto estudiado dedica un tema a la proporcionalidad directa, los porcentajes y sus aplicaciones. No resulta extraño que los libros de texto contengan más contenidos que los especificados ya que el currículo oficial recoge sólo los contenidos mínimos, por lo que el resto de contenidos que completan la enseñanza son escogidos a criterio de cada editorial.

Respecto a las ausencias de contenidos en los libros de texto, se detecta que en 2º ESO se empiezan a relacionar el concepto gráfico y algebraico de las funciones lineales y afines. Además, se explica a través de una gráfica y de una tabla la relación de dependencia y la proporcionalidad directa entre ambas variables. Sin embargo, según el currículo estas nociones deberían estar presentes desde 1º ESO, momento en el que el libro de texto escogido explica cómo operar con monomios, resolver ecuaciones e introduce la noción de relación entre dos variables. En cuanto a la continuidad existente en todos los cursos de la ESO según el currículo y referente al tema de semejanza, teorema de Tales y sus aplicaciones, se manifiesta una clara ausencia en el libro de texto escogido de 3º ESO debido a que no existe ningún apartado del libro en el que se trabajen estos contenidos. Adicionalmente, a pesar de que en el currículo está especificado que el concepto de tasa de variación media como medida de la variación de una función en un intervalo debe estudiarse en ambas opciones de 4º ESO, Ciencias y Tecnología y Ciencias Sociales, no se presenta este contenido hasta 1º Bachillerato. Referente a la utilización de herramientas tecnológicas para facilitar cálculos y representaciones, sólo dos de los libros de texto mencionan herramientas con las que trabajar funciones lineales y afines a pesar de que el uso de tecnologías está presente en el currículo y en los criterios de evaluación de todos los cursos de la ESO y Bachillerato. En el libro de texto de 2º ESO al finalizar el tema de funciones dedica dos páginas al uso del programa informático *Derive* para realizar cálculos con expresiones algebraicas y representar funciones en el ordenador. Además en el tema de triángulos, introduce el programa informático *Cabri-Géomètre* con el cual se pueden estudiar propiedades y relaciones entre figuras geométricas. Por su parte, en el libro de texto de 3º ESO, existen unos recuadros al margen que redirigen al estudiante a páginas web del proyecto *Descartes*. Este es un proyecto del Ministerio de Educación, Cultura y Deporte de España con el que se trata de promover la utilización de las tecnologías de la información y de la comunicación como recurso didáctico. Consecuentemente, y debido a que el resto de materiales no contienen estas cuestiones de índole informático, deben ser introducidas íntegramente por el profesor para adecuarse al currículo establecido por ley.

Una vez analizadas las presencias y ausencias y teniendo en cuenta las dificultades de su enseñanza y el contexto, se puede concluir que existe un alto grado de correspondencia entre los contenidos que presentan los libros de texto y los señalados en el currículo. Esta sincronía no es

Métodos de resolución y errores en problemas de funciones lineales y afines del alumnado de 3º ESO del aula ordinaria y del aula de excelencia

casual ya que el currículo indica los contenidos que deben ser enseñados en cada nivel educativo así como los criterios de evaluación, estando ambos regidos por la legislación. Consecuentemente, las distintas editoriales deben ajustarse a estos criterios para que sus materiales sean escogidos por los distintos centros educativos de la geografía española.

Parte II: Análisis de un proceso de estudio de las funciones lineales y afines en 3º ESO

En esta segunda parte del Trabajo Fin de Máster se analiza un proceso de estudio de las funciones lineales y afines en 3º ESO en el aula de excelencia.

El análisis se divide en otros cuatro capítulos. En el quinto capítulo se analiza en el libro de texto de referencia las funciones lineales y afines. Las dificultades y errores previsibles en el aprendizaje de la unidad didáctica se muestran en el sexto capítulo. En el séptimo capítulo se presenta el proceso de estudio en el que se especifica la distribución del tiempo de la clase, las actividades adicionales planificadas y la tarea prevista.

En el octavo capítulo se presenta la fase de experimentación en la que primero se expone la muestra y el diseño de la experimentación. A continuación, se muestra el cuestionario que el alumnado del aula ordinaria y del aula de excelencia realiza sobre el tema de funciones lineales y afines. Finalmente, se contrastan los métodos de resolución y errores previsibles con los observados tras la realización del examen. Estos resultados se discuten con el objetivo de extraer conclusiones respecto a la pertinencia de la separación en dos grupos de distinto nivel y la existencia de correlación entre los niveles y los métodos de resolución y los errores.

Capítulo 5 Las funciones lineales y afines en el libro de texto de referencia

En este capítulo se analiza la unidad 8, Funciones lineales, del libro de texto de referencia de 3º ESO del centro educativo donde tiene lugar la actividad docente. Dicho libro, también utilizado para el estudio de actividades del capítulo 3, es de la editorial McGraw-Hill del año 2007 (consultar título del libro en el apartado de *Referencias*). Para llevar a cabo el análisis de la unidad, se utiliza el artículo de los autores D. Godino, J., Font, V., R. Wilhelmi, M. publicado en la revista *Relime* en el año 2006: *Análisis Ontosemiótico de una lección sobre la suma y la resta*, páginas 131-155.

5.1. Objetos matemáticos involucrados

A continuación se presentan los objetos matemáticos involucrados en el tema. A pesar de que se exponen en forma de tabla, dichos componentes que configuran el libro analizado están relacionados entre sí.

LENGUAJE	
<i>Verbal</i>	<ul style="list-style-type: none"> - Gráfica, representación, en función de, relación, características, magnitudes directamente proporcionales, proporcionalidad directa, posición relativa, variable dependiente e independiente, dominio, recorrido, continuidad, función decreciente y creciente, función impar, función par, simétrica respecto del origen de coordenadas, función lineal, función afín, inclinación, pendiente, ejes de coordenadas, origen de coordenadas, ordenada en el origen, ordenada, abscisa, sistemas de ecuaciones, expresión algebraica, recta, ecuación, grado, incógnitas, punto, coordenadas, coordenadas cartesianas, pertenencia, secante, punto de intersección, paralelas, coincidentes, corte de dos rectas en un punto, método de reducción, método de igualación, compatible determinado, solución, incompatible, infinitas soluciones, compatible indeterminado, punto de equilibrio, pasa por, tabla de valores, estudia, asocia, calcula, cálculo, obtén, averigua, halla, relacionar, razona, resuelve, indica, transformar, dibujar, obtener, determina, analiza, diagonal, cuadrilátero, cuadrantes, triángulo y coeficiente.
<i>Gráfico</i>	<ul style="list-style-type: none"> - Representaciones en ejes cartesianos. - Tablas de valores: representación de pares de coordenadas.
<i>Simbólico</i>	<ul style="list-style-type: none"> - $+$, $-$, y, x, $f(x)$, $f(-x)$, m, $=$, $/$, 0, $\frac{2}{3}$, \neq, $(,)$, n, $“(, ”)$, \leftrightarrow, r, s, $“,”$, \in, $\{$.

CONCEPTOS	
<i>Previos</i>	<ul style="list-style-type: none"> - Función, representación de funciones en ejes cartesianos, tablas de valores, expresión algebraica de una función, puntos de corte con ejes, función lineal, función afín, función continua, función creciente, función decreciente, función constante, función par e impar, dominio, recorrido o imagen, variable dependiente, variable independiente, máximo y mínimo, recta, pendiente, ordenada en el origen, proporcionalidad directa, constante de proporcionalidad, ecuaciones de primer grado con dos incógnitas, sistemas de ecuaciones lineales de dos ecuaciones con dos incógnitas, métodos de resolución de sistemas y discusión de un sistema de ecuaciones.

Emergentes

- Obtención de la ecuación de la recta: 2 puntos y pendiente y punto.
- Posición relativa de dos rectas: secantes, paralelas y coincidentes.

PROCEDIMIENTOS

- Descontextualización del enunciado del problema.
- Contextualización de enunciados descontextualizados.
- Interpretación de una tabla como una gráfica y viceversa.
- Interpretación y obtención de la información de una función.
- Representación gráfica de una función.
- Interpretación de características de una función.
- Obtención de la ecuación de una recta.
- Asociación de expresiones algebraicas con gráficas y viceversa.
- Cálculo de posición relativa de rectas.
- Distinción entre función lineal y función afín.

SITUACIONES

- Problemas contextualizados de funciones lineales y afines en los que se expresa verbalmente la relación de proporcionalidad de dos magnitudes que se corresponden con la variable dependiente e independiente, o bien los condicionantes de la recta o rectas (paralela a otra recta, que pasa por el punto, punto de corte, etc.).
- Problemas descontextualizados de funciones lineales y afines:
 - Problemas descontextualizados con tablas de valores para representar gráficas, indicar características y realizar cálculos.
 - Problemas descontextualizados de funciones lineales y afines dadas mediante una expresión algebraica para representar gráficas, indicar características y realizar cálculos o tablas de valores.
 - Problemas descontextualizados de sistemas de ecuaciones para estudiar posición relativa gráfica o analíticamente.
 - Problemas descontextualizados para hallar ecuaciones de rectas a partir de condicionantes dados de forma gráfica o escrita.

PROPIEDADES

- Las relaciones de proporcionalidad directa entre dos magnitudes x e y se pueden expresar como funciones lineales cuya expresión algebraica es $y=mx$ y se representan a través de una recta que pasa por el origen de coordenadas.
- Las funciones lineales son continuas, impares o simétricas respecto del origen de coordenadas y en función de su pendiente m , crecientes o decrecientes.
- Las funciones cuya expresión algebraica es $y=mx+n$ con $n \neq 0$, se llaman funciones afines. Su representación gráfica es una recta que pasa por el punto de coordenadas $(0, n)$. Al coeficiente m se le llama pendiente o inclinación de la recta y a la n , ordenada en el origen.
- Una recta queda determinada por dos puntos por los que pasa o por un punto y su pendiente o inclinación. A partir de estos datos, se puede obtener la representación gráfica y su expresión algebraica.
- Si un sistema de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas es compatible determinado, las rectas que determinan son secantes.

<ul style="list-style-type: none">- Si un sistema de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas es compatible indeterminado, las rectas que determinan son coincidentes.- Si un sistema de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas es incompatible, las rectas que determinan son paralelas.
ARGUMENTOS
<ul style="list-style-type: none">- Comprobación de las propiedades en casos particulares.- Justificación de las propiedades utilizando elementos genéricos.- Comprobación de que la representación gráfica de una recta concuerda con su expresión algebraica y viceversa.- Justificación de la posición relativa de dos rectas a partir de gráficas y por la discusión del sistema de ecuaciones.

5.2. Análisis global de la unidad didáctica

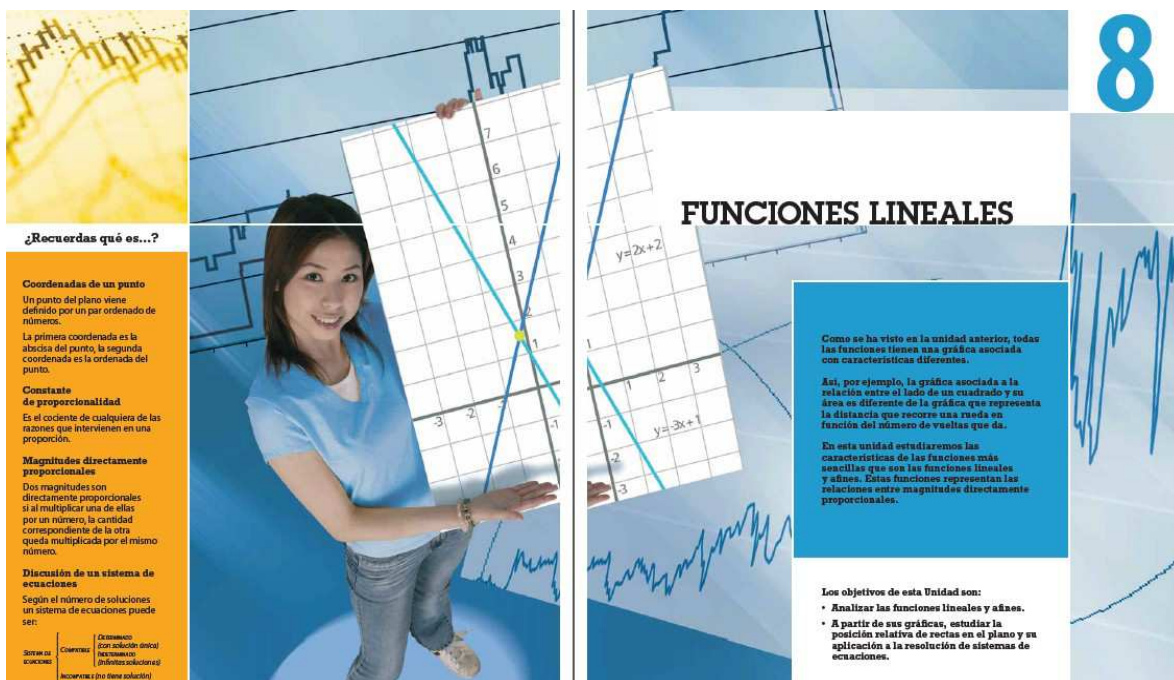
En el libro de texto de referencia de 3º ESO de la editorial McGraw-Hill, la unidad didáctica dedicada a las funciones lineales y afines se encuentra en la *lección 8*, titulada *Funciones lineales*, desde la página 132 a la 149 (consultar *Anexo A: Unidad didáctica del libro de texto*). El tema se subdivide en 6 partes:

- Introducción al tema de estudio (págs. 132-133).
- Desarrollo de contenidos en 6 apartados con ejercicios para practicar al final de cada contenido (págs. 134-141).
- Ejercicios resueltos (págs. 142-143).
- Ejercicios propuestos de cada uno de los apartados (págs. 144-147).
- Esquema resumen de los conceptos vistos en la unidad (pág. 148).
- Curiosidades, juegos y desafíos (pág. 149).

Las dos primeras páginas de la unidad contienen tres partes diferenciadas que contextualizan el tema que se estudia:

- En la mitad izquierda de la primera página hay un apartado titulado “¿Recuerdas qué es...?”. Como su nombre indica es un breve repaso de contenidos ya estudiados relacionados con la lección que sigue. En este tema se recuerda: las coordenadas de un punto, la constante de proporcionalidad, las magnitudes directamente proporcionales y la discusión de un sistema de ecuaciones.
- En la mitad de las dos páginas se aprecia una imagen de una chica que sujeta un tablón con una gráfica en la que se cortan dos rectas en un punto.
- En la mitad derecha se observa el título de la unidad y el número de la lección. En un párrafo comenta que el concepto de gráfica se ha visto en la unidad anterior y expone un

ejemplo real de representación del área de un cuadrado en función de su lado. Para finalizar, indica qué se va a estudiar en la unidad y cuáles son los objetivos: analizar funciones lineales y afines y a partir de sus gráficas, estudiar la posición relativa de rectas en el plano y su aplicación en la resolución de sistemas de ecuaciones.



¿Recuerdas qué es...?

Coordenadas de un punto
Un punto del plano viene definido por un par ordenado de números.
La primera coordenada es la abscisa del punto, la segunda coordenada es la ordenada del punto.

Constante de proporcionalidad
Es el cociente de cualquiera de las razones que intervienen en una proporción.

Magnitudes directamente proporcionales
Dos magnitudes son directamente proporcionales si al multiplicar una de ellas por un número, la cantidad correspondiente de la otra queda multiplicada por el mismo número.

Discusión de un sistema de ecuaciones
Según el número de soluciones un sistema de ecuaciones puede ser:

Sistema de ecuaciones	Compatible	Incompatible (no tiene solución)
	Con solución única (un único sistema de ecuaciones)	Con infinitas soluciones (infinitos sistemas de ecuaciones)

FUNCIONES LINEALES

Como se ha visto en la unidad anterior, todas las funciones tienen una gráfica asociada con características diferentes.

Así, por ejemplo, la gráfica asociada a la relación entre el lado de un cuadrado y su área es diferente de la gráfica que representa la distancia que recorre una rueda en función del número de vueltas que da.

En esta unidad estudiaremos las características de las funciones más sencillas que son las funciones lineales y afines. Estas funciones representan las relaciones entre magnitudes directamente proporcionales.

Los objetivos de esta Unidad son:

- Analizar las funciones lineales y afines.
- A partir de sus gráficas, estudiar la posición relativa de rectas en el plano y su aplicación a la resolución de sistemas de ecuaciones.

En las siguientes páginas se desarrollan los 6 apartados que componen el tema: función lineal, características de la función lineal, función afín, ecuación de la recta, obtención de la ecuación de la recta y posición relativa de dos rectas. Estos subapartados son tratados según su contenido y poseen una estructura similar que responde al siguiente patrón:

- Título del subapartado.
- Exposición del contenido. En varias secciones, se apoya la explicación con una gráfica y/o se hace a través de un ejemplo resuelto.
- Concepto clave del subapartado enmarcado en un recuadro gris.
- Ejemplo resuelto.
- Sección de ejercicios para que el estudiante aplique lo explicado anteriormente.
- Recuadro al margen que indica la página web con la que acceder al proyecto Descartes con el que se trabajan ejercicios relacionados con el contenido tratado a través de applets.
- Recuadro al margen que redirige al alumnado al CD que incluye el libro para completar su aprendizaje. (Esta nota sólo se encuentra en el último apartado).

CD ⓘ

En la pestaña Actividades/
Ejercicios modo examen/
Unidad 8, encontrarás varios
ejercicios interactivos, para
repasar la unidad.

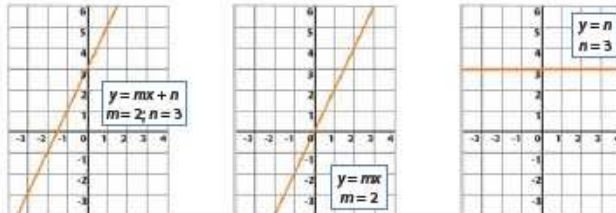
4

ECUACIÓN DE LA RECTA

Las gráficas de la función lineal y afín son rectas. La expresión algebraica de la función afín $y = mx + n$ es la que se utiliza en general como ecuación de una recta.

Si la ordenada en el origen es $n = 0$, la ecuación $y = mx$ representa una recta que pasa por el origen de coordenadas.

Si la pendiente es $m = 0$, la ecuación $y = n$ representa una recta horizontal que pasa por el punto de coordenadas $(0, n)$.



La ecuación de la recta en el plano es $y = mx + n$.
La pendiente de la recta es m .
La ordenada en el origen de coordenadas es n .

Una ecuación de primer grado con dos incógnitas también representa una recta.

Ejemplo 1

En la ecuación $2x + 3y = 5$, si se despeja y en función de x se transforma en $y = mx + n$.

$$2x + 3y = 5 \Leftrightarrow 3y = -2x + 5 \Leftrightarrow y = -\frac{2}{3}x + \frac{5}{3}$$

La pendiente de la recta es $m = -\frac{2}{3}$.

La ordenada en el origen es $n = \frac{5}{3}$.

WEB @

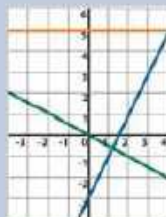
http://descartes.cnice.mec.es/3_eso/Funcion_afin/Ejercicios_con_funciones_afines%201.htm

Primero se muestra la ecuación de una recta y luego se calcula esa ecuación.

Ejercicios

8 Relaciona las ecuaciones con la gráfica correspondiente:

- a) $y = 5$
- b) $y = -\frac{1}{2}x$
- c) $4x - 2y = 6$



9 Transforma la ecuación $2(x - 1) + 5y = 7$ de manera que se exprese de la forma $y = mx + n$.

Después del desarrollo de contenidos, en las dos páginas siguientes hay dos ejercicios resueltos en los que se recogen una recopilación de estrategias de resolución de problemas, que tienen en cuenta la relación entre diferentes conceptos de la unidad, cuya finalidad es la de transmitir y aclarar al estudiante los procedimientos para su resolución.

EJERCICIOS RESUELTOS

1 Determina la ecuación de la recta $s: y = mx + n$, sabiendo que corta a la recta $r: 3x + 4y = 7$ en el punto de coordenadas $(1, 1)$ y la ordenada en el origen es 3.

Datos conocidos

Punto de intersección de las dos rectas: $(1, 1)$

La ordenada en el origen de la recta s , $n = 3$

Incógnita

La pendiente m de la recta s .

Como la ordenada en el origen es $n = 3$, la ecuación de la recta s es:

$$y = mx + 3$$

Las coordenadas del punto de intersección de las dos rectas verifican la ecuación de la recta s : $1 = m1 + 3$

Luego la pendiente es $m = -2$.

La ecuación de la recta s es $y = -2x + 3$

A continuación, hay una batería de actividades propuestas (ejercicios, problemas y cuestiones) adaptados al nivel de los alumnos. Dichas actividades están estructuradas manteniendo el orden de los diferentes epígrafes del tema objeto de estudio y marcando el nivel de dificultad: junto al número de actividad hay un rectángulo en el que caben a su vez tres cuadrados más pequeños, en función del número de cuadrados la actividad tiene un nivel bajo (un cuadrado), medio (dos cuadrados) o alto (tres cuadrados).

La función lineal. Características

1 Representa las funciones lineales:

- a) $y = -5x$ b) $y = \frac{1}{4}x$ c) $y = 7x$
 d) $y = -\frac{2}{3}x$ e) $y = \frac{1}{5}x$ f) $y = \frac{4}{3}x$

2 Representa la función lineal en los casos:

- a) Pasa por el punto de coordenadas $(3, 5)$.
 b) Pasa por el punto de coordenadas $(2, 4)$.

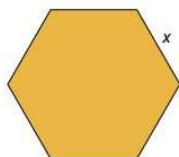
3 Comprueba si los siguientes puntos pertenecen a la gráfica de la función lineal $y = \frac{2}{3}x$:

- a) $A(0, 0)$ b) $B(2, -8)$
 c) $C\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{2}\right)$ d) $D\left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{3}\right)$ e) $E\left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{6}\right)$

4 Sabiendo que un litro de gasóleo vale 0,95 €, se pide:

- a) Construye la tabla de valores que relaciona los litros de gasóleo consumidos y el precio.
 b) ¿Cuál es la función asociada a la situación?
 c) Representa la función.

5 La longitud del lado de un hexágono regular es x centímetros. Expresa el perímetro del hexágono en función de la longitud del lado. Representa la gráfica de la función.



6 La gráfica de una función lineal pasa por el punto $P(-6, -3)$. ¿Cuál es su pendiente?

9 Un peregrino camina a una velocidad de 4,5 km/h. Representa en unos ejes de coordenadas cartesianas la gráfica de la función que relaciona el espacio recorrido por el peregrino con el tiempo que emplea en recorrerlo.

Si en la etapa que ha realizado hoy ha tardado 5 h 40 min, ¿qué distancia ha recorrido?



10 La velocidad de propagación del sonido en el aire es de 340 m/s.

- a) Representa la gráfica de la función que relaciona la distancia recorrida por el sonido en función del tiempo.
 b) Si el tiempo que transcurre desde que un observador ve un relámpago hasta que oye el trueno es de 5 segundos, ¿a qué distancia del observador está la tormenta?

La función afín. Características

11 Representa la gráfica de las funciones:

- a) $y = \frac{2}{5}x + 2$ b) $y = -\frac{3}{2}x + 1$ c) $y = 2x - 6$

12 Indica qué funciones son lineales o afines y si son crecientes o decrecientes. Determina en cada caso el punto de intersección de la gráfica con el eje de ordenadas.

- a) $y = 3x - 2$ b) $y = -\frac{1}{2}x + 4$ c) $y = -4x$

Finalmente, la última sección del tema tiene como finalidad ayudar al estudiante a ordenar los conceptos fundamentales de la unidad motivándole a emplear correctamente el lenguaje matemático dentro de su contexto y su aplicación en la vida cotidiana. Para ello, en esta lección se muestra un ejemplo de funciones afines para indicar las distintas escalas de temperaturas y un desafío en el que se pregunta el punto de equilibrio entre la oferta y la demanda.

8 PARA REPASAR EN GRUPO

Elabora con tu grupo de trabajo un esquema con los siguientes conceptos de la Unidad y pon un ejemplo de cada uno de ellos.

CONCEPTO	DEFINICIÓN
Función lineal	Es una función de expresión algebraica: $y = mx$ La gráfica de una función lineal es una línea recta que pasa por el origen de coordenadas.
Pendiente de una función lineal	Es el coeficiente m . Expresa el aumento o disminución de la variable dependiente por cada unidad de la variable independiente.
Función afín	Es una función de expresión algebraica: $y = mx + n$, $n \neq 0$ La gráfica de una función afín es una recta que pasa por el punto de coordenadas $(0, n)$. El coeficiente m representa la inclinación o pendiente de la recta.
Posición relativa de dos rectas en el plano	Rectas secantes: Las dos rectas se cortan en un punto. El sistema formado con las ecuaciones de las rectas es compatible determinado . Rectas paralelas: Las dos rectas no se cortan. El sistema formado con las ecuaciones de las rectas es incompatible . Rectas coincidentes: El sistema formado con las ecuaciones de las rectas es compatible indeterminado .

CURIOSIDADES, JUEGOS Y DESAFÍOS

LAS FUNCIONES AFINES EN LA VIDA COTIDIANA

La temperatura se puede medir en grados Celsius (grados centígrados), grados Fahrenheit o en grados Kelvin. La escala de medida en grados Celsius es utilizada en gran parte del mundo, la escala Fahrenheit en los países anglosajones y la escala Kelvin entre los científicos.

Si se indican las escalas con las letras

C para la escala Celsius
F para la escala Fahrenheit
K para la escala Kelvin

la transformación de unidades se realiza mediante las funciones afines:

$$K = C + 273 \quad F = 1,8 C + 32$$

De esta forma se puede decir que el punto de congelación del agua es:

$$0^\circ C \text{ o } 32^\circ F \text{ o } 273^\circ K$$

y el punto de ebullición del agua es:

$$100^\circ C \text{ o } 212^\circ F \text{ o } 373^\circ K$$

Hay más usos de las funciones afines para determinar las relaciones entre las magnitudes. Por ejemplo, se puede obtener el peso que correspondería a una persona en función de su estatura. La relación entre las dos magnitudes viene dada por la función afín:

$$y = \frac{3}{4}x - \frac{250}{4} \quad (x \text{ es la estatura en cm})$$

Utilizando esta función puedes calcular el peso que correspondería a tu estatura.

DESAFÍO MATEMÁTICO

Cuando una empresa fabrica un determinado artículo para lanzarlo al mercado, previamente ha realizado un estudio de la oferta que debería hacerse para cubrir la demanda de ese artículo por parte de los consumidores. Esto es así porque si el precio de un producto es alto, aunque deje más margen de ganancias tiene menos compradores. Y, por el contrario, si el precio es más bajo tendrá más compradores pero habrá menor margen de ganancias.

A las empresas les interesa que la demanda del producto sea acorde con la oferta del mismo para que no haya pérdidas económicas. Para ello estudian la relación *oferta-precio* y *demanda-precio* buscando el punto de equilibrio para conseguir los máximos beneficios.

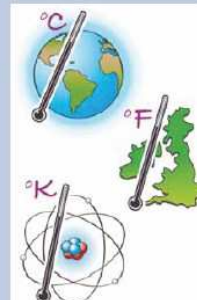
Imagina que una empresa fabrica reproducciones de películas en DVD.

La oferta viene dada por la función $y = \frac{x}{200} + 10$, donde y es el precio en euros y x el número de películas ofertadas.

La demanda viene dada por la función $y = \frac{x}{50} + 10$, donde y es el precio en euros y x el número de películas demandadas.

¿Cuál es el punto de equilibrio entre la oferta y la demanda?

Haz un estudio conjunto de ambas funciones afines y saca las conclusiones más oportunas.



Capítulo 6 Dificultades y errores previsibles en el aprendizaje de la unidad didáctica

En este capítulo se recogen las dificultades que presentan los estudiantes de 3º ESO en el aprendizaje de las funciones lineales y afines. Asimismo se incluyen los errores previsibles que pueden cometer y las posibles causas que los originan.

6.1. Dificultades

Los alumnos de 3º ESO pueden presentar dificultades en la comprensión de los siguientes conceptos:

- Magnitudes directamente proporcionales.
- Expresión algebraica de funciones lineales y afines asociada a recta infinita que corta los ejes OX (cuando la $y=0$, es decir solución de la ecuación) y OY (cuando la $x=0$).
- Simetría respecto del origen de coordenadas de las funciones lineales.
- Coeficiente m , pendiente que expresa el aumento o disminución de la variable dependiente por cada unidad de la variable independiente. La pendiente puede ser positiva (función creciente), negativa (función decreciente) o cero (función constante).
- Representación de funciones cuya pendiente es un número racional.
- Pertenencia de un punto a una recta, comprobación a través de la expresión algebraica.
- Distinción entre función afín como función que contiene una parte proporcional y una fija y función lineal que sólo tiene parte proporcional.
- Obtención de una recta a partir de dos puntos o de un punto y una pendiente.
- Problema en el que se tienen dos puntos se puede transformar en un problema de un punto y la pendiente y viceversa.
- Métodos de resolución y discusión de un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas.
- Relación del número de soluciones de un sistema de ecuaciones con la posición relativa de las rectas (paralelas, coincidentes y secantes).
- Identificación de características de una función a partir de la expresión algebraica y sin dibujarla.
- Cálculo de la expresión algebraica de una función a partir de su representación gráfica.
- Interpretación del significado de una función.
- Aplicación de funciones lineales y afines: a partir de un problema contextualizado, deducción de la expresión algebraica de una función lineal o afín.

6.2. Errores esperables y su posible origen

En el proceso de aprendizaje de las funciones lineales y afines se prevé que los estudiantes cometan los siguientes errores:

- Representación de rectas sólo en el primer cuadrante, sin dibujarlas de manera infinita cortando los ejes OX y OY .
- Uso de más de dos puntos para representar una recta.
- Inexactitud al representar funciones cuya pendiente es un número racional ya que la representan con la pendiente en forma decimal.
- Confusión entre eje de ordenadas y eje de abscisas.
- Cálculo del corte con el eje OX con $x=0$ y corte con el eje OY con $y=0$.
- Incorrecta interpretación del concepto de ordenada en el origen= n como el punto $(n, 0)$.
- Cálculo incorrecto de puntos cuando la función tiene pendiente negativa, es decir la x está precedida de un coeficiente con un signo “-”.
- Cálculo incorrecto de la constante de proporcionalidad.
- Interpretación de que la pendiente es el coeficiente que acompaña a la x aunque la recta esté dada de forma implícita.
- Resolución incorrecta de sistema de ecuaciones algebraicamente.
- Imprecisión en la representación gráfica de dos funciones: escalas incorrectas, punto de corte impreciso de dos rectas secantes, rectas paralelas que no lo son y rectas coincidentes que no coinciden.
- Identificación de un sistema compatible indeterminado con uno incompatible: $0x=constante$ tratamiento como si fuera compatible indeterminado y $0x=0$ como si fuera incompatible.
- Identificación de que dos rectas se cortan si y sólo si el signo de su pendiente es distinto.
- Identificación incorrecta de la variable dependiente y la variable independiente.

Estos errores pueden originarse por diversos motivos, posiblemente uno de ellos sea la atomización de la enseñanza la cual fragmenta los contenidos en numerosos apartados. Esto provoca que los alumnos perciban los temas como unidades estancas que no parecen tener continuidad a lo largo del curso académico. Consecuentemente, a los estudiantes les resulta complicado relacionar y aplicar conceptos que han aprendido en unidades anteriores, como por ejemplo que las ecuaciones algebraicas de primer grado y los sistemas de ecuaciones se pueden representar gráficamente. Además, en ocasiones los alumnos realizan cálculos y siguen de manera automática los pasos establecidos para resolver las distintas actividades sin pensar en el significado y el porqué de lo que están haciendo.

Capítulo 7 El proceso de estudio

En este capítulo se expone el proceso de estudio llevado a cabo por el alumnado de 3º ESO de la clase de excelencia, en la cual han sido separados los estudiantes con mas capacidades en la materia de matemáticas, de un centro educativo situado en Pamplona (Navarra). En primer lugar se presenta la distribución del tiempo de la clase, además se indican las actividades adicionales planificadas. Finalmente, se explica la tarea prevista para que los estudiantes realicen de manera autónoma.

7.1. Distribución del tiempo de la clase

Con el fin de realizar el examen antes del fin de periodo de prácticas y del puente de Mayo, y para ir al mismo ritmo que el resto de secciones, se acuerda con el profesor titular de la asignatura dedicar al tema de funciones lineales y afines 12 sesiones; 10 de ellas para trabajar el contenido, 1 para el examen y la última para la corrección y revisión de exámenes. Todas estas sesiones tienen una duración de 50 minutos.

Si para el desarrollo de este tema en la práctica se emplean menos de 10 sesiones y si el aula de ordenadores está disponible, las clases extras se destinan a iniciar a los estudiantes en el uso del programa Geogebra y a reforzar los contenidos trabajando con dicha aplicación. En las diapositivas (consultar *Anexo C: Material proyectado en clase*), se indican unas páginas web vinculadas a applets creados por Manuel Sada Allo, Juan Bragado Rodríguez y José Manuel Arranz para afianzar los conceptos de función lineal y función afín. Independientemente de ello, la profesora durante el tema introduce la aplicación a los estudiantes, se apoya en el programa para realizar sus exposiciones y resuelve actividades proyectando el ejercicio con Geogebra en la pizarra.

Las sesiones empleadas al desarrollo del tema se estructuran de la siguiente manera:

- Sesiones 1, 2, 3, 4, 6 y 7: se combina la corrección de las actividades del día anterior (excepto en la primera y séptima sesión), la exposición del contenido y la actividad individual (excepto la sexta sesión) para que los estudiantes practiquen lo estudiado en ese día. El desarrollo de la clase puede seguir esta secuencia o invertirse el orden de cada una de las 3 partes.
- Sesiones 5, 8, 9 y 10: se dedican íntegramente a la corrección y realización de ejercicios, problemas y cuestiones individualmente, excepto la novena sesión en la que por parejas, tal y como están distribuidos en clase, realizan la actividad.

Como se ha descrito anteriormente, la mayoría de las sesiones constan de tres etapas bien diferenciadas a lo largo de las cuales discurre la clase y que no tienen porqué seguir el mismo orden. La primera parte de la sesión se dedica a la corrección de los ejercicios de tarea. El objetivo que se persigue es el repaso de la clase anterior y para resolver las dudas que surjan:

Tipo	Tiempo	Nº Sesión	Responsable	Descripción	Tipo de docencia
Corrección actividades	15'	2-3-5 6-9	Compartida	El estudiante corrige en la pizarra o en voz alta las actividades que han sido planteadas el día anterior, además responde, en la medida de lo posible, a las dudas de sus compañeros. La profesora corrige, si es necesario, la actividad del alumno en la pizarra y apoya en la resolución de dudas del resto de estudiantes para clarificar contenidos.	Constructivista
		2-3-4-6- 8-9-10	Profesora	La profesora corrige las actividades en la pizarra o proyecta la actividad resuelta con Geogebra en la pizarra enfatizando en aquellos aspectos que generan más dificultades.	Mayéutica

Posteriormente, la profesora comienza a desarrollar el nuevo contenido en la pizarra y proyecta las diapositivas preparadas para tal fin (consultar *Anexo C: Material proyectado en clase*). En función de la naturaleza del concepto y si los estudiantes presentan conocimientos previos o herramientas para desarrollar el nuevo saber, las explicaciones son impartidas de forma dialógica, constructivista o magistral.

Tipo	Tiempo	Nº Sesión	Responsable	Descripción	Tipo de docencia
Teoría	20'	1	Compartida	A partir de los conocimientos de proporcionalidad que poseen los estudiantes, a través de preguntas sobre un problema propuesto en las diapositivas, les introduce la noción de <u>función lineal</u> .	Constructivista
		2-3	Compartida	La profesora plantea un problema de las diapositivas y pregunta al alumnado. Con las respuestas de los estudiantes se explica el concepto de <u>función afín</u> .	Dialógica

Métodos de resolución y errores en problemas de funciones lineales y afines del alumnado de 3º ESO del aula ordinaria y del aula de excelencia

		4	Profesora	La profesora expone el contenido de <u>ecuaciones de una recta</u> mediante las diapositivas del tema y resolviendo los posibles casos (punto-pendiente y punto-punto).	Magistral
		6-7	Compartida	En base a los conocimientos previos del alumnado de resolución de sistemas de 2 ecuaciones lineales con 2 incógnitas, la profesora hace una serie de preguntas sobre las <u>posiciones relativas de las rectas</u> integrando las respuestas de éstos en la explicación de dicho contenido.	Constructivista-Dialógica

El objetivo de cada sesión está perfectamente definido ya que los contenidos del tema han sido secuenciados y las clases estructuradas para ir desarrollando todos los conceptos en orden. A pesar de que se subdivide el tema en estas secciones más pequeñas que se abordan a diario, la profesora con sus preguntas y explicaciones, refuerza saberes adquiridos previamente (como por ejemplo proporcionalidad y resolución de sistemas de ecuaciones lineales), amplía conocimientos y prepara procesos de aprendizaje de actividades que se realizan en sesiones futuras. En el *Anexo B: Unidad didáctica “Funciones lineales y afines” del centro educativo* se muestra la unidad didáctica completa referente al tema de funciones lineales y afines. En el apartado 5 de dicha unidad, se indica en profundidad cuáles son las actividades de enseñanza realizadas en cada sesión.

Finalmente, el alumnado trabaja individualmente las actividades asignadas por la profesora con el fin de practicar de manera autónoma los conceptos que se han introducido en la sesión. Mientras los estudiantes están realizando los ejercicios, la profesora se pasea por las mesas de los alumnos para ir resolviendo las dudas puntuales que van surgiendo y para comprobar el nivel de adquisición de conocimientos y adaptar en consonancia las sucesivas sesiones.

Tipo	Tiempo	Nº Sesión	Responsable	Descripción	Tipo de docencia
Práctica	15'	1 a 5 7 a 10	Alumnado	Los estudiantes realizan individualmente las actividades que les son encomendadas. Aquellas que no realicen en el tiempo destinado en clase son de tarea para acabar en casa.	Constructivista

7.2. Actividades adicionales planificadas

Los ejercicios, problemas y cuestiones que realizan los estudiantes son principalmente extraídos del libro de texto de referencia, de las diapositivas proyectadas en clase y una actividad diseñada para el refuerzo de contenidos y que se realiza al final del tema (consultar *Anexo D: Problema repaso “Necesito un fontanero”*).

Nº Sesión	Corrección (C) Teoría (T) Práctica (P)	Actividad	Tipo	Tiempo estimado	Relación con el proceso de enseñanza aprendizaje
1	T-P	Página 135, nº 2	Ejercicio	15'	Aplicación
2	C-T-P	Página 134, nº 1	Ejercicio	25'	Refuerzo
		“Lléname”, diapositivas	Problema		Ampliación
		Página 136, nº 4,5 y 7	Ejercicio		Aplicación
		Página 136, nº 6	Problema		Refuerzo
		Página 136, nº 3	Cuestión		Preparación de actividad futura
3	T-C-P	“Asar carne”, diapositivas	Cuestión	15'	Ampliación
		“Lléname”, diapositivas	Problema		Aplicación
		Página 137, nº 8 y 9	Ejercicio		Aplicación
4	T-C-P	Página 138, nº 10, 11 y 12	Ejercicio	15'	Aplicación
5	C-P	Página 144 a 147, nº 11b, 15, 28, 29, 30 y 33 a,b.	Ejercicio	35'	Aplicación
		Página 146-147, nº 20 y 31	Problema		Aplicación
7	T-P	Página 141, nº 13, 14, 15 y 16	Ejercicio	15'	Aplicación
8	C-P	Página 147, nº 35 a 40	Problema	35'	Aplicación
9	P	“Necesito un fontanero”	Problema	50'	Refuerzo
10	P	Ejercicio posición relativa y ecuación recta tipo examen	Ejercicio	50'	Preparación examen
		Problema tipo examen	Problema		
		Página 147, nº 44 y 45	Cuestión		

Métodos de resolución y errores en problemas de funciones lineales y afines del alumnado de 3º ESO del aula ordinaria y del aula de excelencia

7.3. La tarea: actividad autónoma del alumnado prevista

Los estudiantes cada día tienen a su disposición un tiempo específico para realizar las actividades que les son propuestas, se planifica de manera que este tiempo sea suficiente para realizarlas en clase. Sin embargo, si no las terminan en clase deben finalizarlas en casa de tarea.

Adicionalmente, los viernes (cuarta y octava sesión) se les proponen más actividades para que las trabajen el fin de semana en casa:

Nº Sesión	Actividad	Tipo	Tiempo estimado	Relación con el proceso de enseñanza aprendizaje (aplicación, refuerzo, ampliación, preparación de actividad futura)
4	Página 144 a 146, nº 2 a, 5, 14, 27	Ejercicio	35'	Aplicación
	Página 144, 146 y 147, nº 9, 21, 32, 41	Problema		
8	Página 147, nº 42 y 43	Problema	20'	Aplicación
	Página 147, nº 44	Cuestión		
	Página 147, nº 45	Ejercicio		

Capítulo 8 Experimentación

En este capítulo se presenta el cuestionario realizado por los estudiantes del aula de excelencia donde se ha impartido docencia en el Prácticum II de especialidad, así como el realizado por los alumnos del aula ordinaria donde no se ha participado en la docencia de las clases. Se comparan los comportamientos y errores esperables con los resultados extraídos de ambos exámenes escritos realizados al finalizar el tema. El objetivo del estudio es analizar los distintos métodos de resolución, las dificultades y errores que cometen ambos grupos, además de dilucidar las posibles causas.

8.1. Muestra y diseño de la experimentación

El centro donde se ha impartido docencia es un colegio concertado religioso situado en el centro de Pamplona. Este centro cuenta con 1.691 alumnos y alumnas repartidos en 4 niveles educativos (Infantil, Primaria, Secundaria y Bachillerato). Un total de 484 estudiantes cursan Educación Secundaria y 227 Bachillerato; el colegio cuenta con 98 profesores, 44 de ellos imparten docencia en ESO y Bachillerato. El perfil general del alumnado es de clase social media-alta y el porcentaje de alumnos de origen español supera el 88%. Los alumnos y alumnas de 3º ESO del centro educativo se dividen en 4 grupos según sus capacidades en la materia de Matemáticas: un aula de excelencia, dos ordinarias y una de refuerzo. La muestra la componen el alumnado de la clase de excelencia y el de una de las dos clases ordinarias de 3º ESO.

El grupo de excelencia está formado por 18 alumnos; 13 chicas y 5 chicos. Los estudiantes de este aula presentan un alto grado de implicación, motivación y participación en el desarrollo de la clase tanto respondiendo las preguntas planteadas por la profesora como saliendo a la pizarra a corregir problemas. Además, se les plantean algunos problemas con un grado de dificultad ligeramente mayor en los que se profundiza un poco más en los contenidos del tema. Durante la exposición de contenidos, la profesora interactúa continuamente con sus alumnos e introduce conceptos que se van a explicar más adelante. Asimismo, se proponen varias maneras de abordar los problemas y se deduce el motivo de resolver un problema de un método u otro advirtiéndoles sobre las ventajas e inconvenientes. Se evita que el proceso de enseñanza esté basado únicamente en instrucciones o reglas que permitan resolver las actividades, es decir que no aprendan de memoria recetas sino que piensen en profundidad el significado del problema y en resolverlo de la manera óptima. Los medios utilizados por la profesora para desarrollar el tema de funciones lineales y afines son la proyección en la pizarra de las diapositivas (consultar *Anexo C: Material proyectado en clase*), las cuales son colgadas en la plataforma del colegio, el libro de texto de la editorial McGrawHill, la pizarra y Geogebra.

Por otro lado, el aula ordinaria lo componen 29 estudiantes de los cuales 20 son chicos y 9 chicas. El desarrollo de los contenidos se produce de manera lineal y sin salirse de la estructura prefijada del tema. Los principales medios empleados por la otra profesora en el proceso de enseñanza de las funciones lineales y afines son el libro de texto de referencia (el mismo que el del aula de excelencia), fichas preparadas por ella y la pizarra.

En ambas clases se combinan una parte teórica y otra práctica en la que los estudiantes aplican el contenido desarrollado ese día. Además, se interrelacionan los conceptos actuales con otros estudiados con anterioridad de manera que se comprenda el significado completo de las

funciones lineales y afines desde una perspectiva algebraica y gráfica. Diariamente, los alumnos de ambos grupos realizan en casa tarea. Al día siguiente, las profesoras según si han efectuado el trabajo o no, les ponen un punto positivo o negativo y les proponen salir a la pizarra a resolverlo.

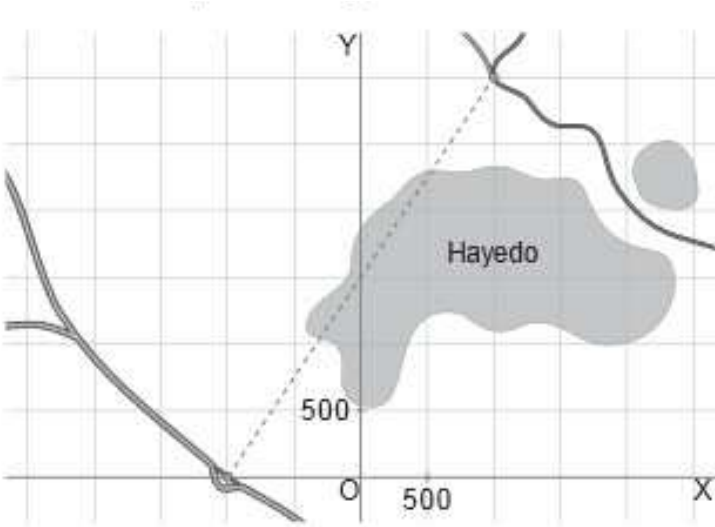
8.2. El cuestionario

Una vez se ha desarrollado el tema de funciones lineales y afines, en ambas clases se dedica una sesión de 50 minutos a realizar el examen escrito. Ambos exámenes tienen 6 cuestiones, de las cuales 3 son idénticas para poder analizar y comparar los resultados de los dos grupos. Los exámenes de ambas clases contienen ejercicios que engloban todos los contenidos expuestos y trabajados en el aula, por ello, las otras 3 cuestiones restantes del examen de excelencia poseen una dificultad ligeramente mayor respecto a los otros 3 ejercicios del grupo ordinario. En ambos exámenes, los ejercicios están ordenados por orden de dificultad, siendo los primeros más sencillos y el último de ellos más complicado.

Los 3 ejercicios comunes a realizar por el alumnado de ambos grupos comprenden 4 aspectos fundamentales en el estudio de funciones lineales y afines en 3º ESO: características de las rectas, posición relativa, ecuación de la recta y aplicación de funciones afines en un problema de la vida cotidiana. En el *Anexo E: Modelo de evaluación del examen* se encuentra el modelo de evaluación de las 3 cuestiones comunes.

El examen realizado por el alumnado del aula de excelencia es el siguiente (las cuestiones comunes son la nº 1, 2 y 3):

Ejercicio 1 (3 puntos)
Dadas las rectas:
a) $5x + 2y = -1$
b) $4x - y = 7$
Determina sus características (crecimiento, pendiente y ordenada en el origen) y su posición relativa.
Ejercicio 2 (1,5 puntos)
Halla la ecuación de la recta:
a) paralela al eje X y que pasa por A (1,3)
b) que tenga pendiente 4 y ordenada en el origen - 0,5.
c) que tenga igual pendiente que $3x + 2y = 6$ y pase por B (-2,3)
Ejercicio 3 (1,5 puntos)
Para celebrar la fiesta de fin de curso, un grupo de amigos alquila un local, y eligen entre dos locales cuyas ofertas son:
Camelot: 1.000 € por el alquiler del local y 5 € por asistente.
Morgana: 200 € por el alquiler del local y 10 € por asistente.
La capacidad máxima en ambos locales es de 300 personas, ¿cuál de ellos elegirías?

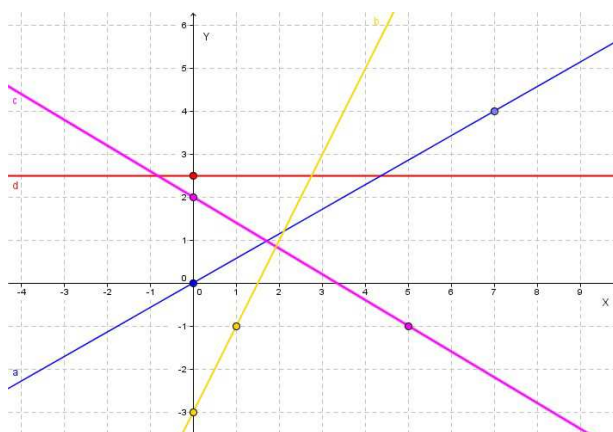
Ejercicio 4 (1,5 puntos)
Una recta que pasa por el punto de coordenadas (0,-2) y tiene pendiente 3. Otra recta pasa por los puntos de coordenadas (1,1) y (2,4). ¿Se trata de la misma recta o de rectas distintas?
Ejercicio 5 (1 punto)
Razona si son verdaderas (V) o falsas (F) las siguientes afirmaciones: a) La recta $3x + 2y = 1$ es la misma que la recta $6x + 4y = 3$. b) Cualquier recta paralela a $y = -2x$ corta a la recta $y = 3x + 7$ y a sus rectas paralelas. c) La pendiente de una recta es el coeficiente que expresa la variación de la x cuando la y aumenta en una unidad. d) Si al resolver un sistema formado por las ecuaciones de dos rectas se obtiene $0x = 2$, las rectas son paralelas.
Ejercicio 6 (1,5 punto)
El proyecto de un tramo de carretera para unir dos localidades tiene un informe de impacto ambiental negativo, por atravesar un hayedo centenario. La decisión que toman los ingenieros es la de realizar un tramo paralelo al proyectado, pero 500 metros más arriba; así se evitará la tala de árboles. ¿Cuál es la expresión del nuevo tramo de carretera?


A continuación se expone el examen realizado por el alumnado del aula ordinaria (las cuestiones comunes son la nº 1, 5 y 6):

Ejercicio 1 (3 puntos)
Dadas las rectas: a) $5x + 2y = -1$ b) $4x - y = 7$ Determina sus características (crecimiento, pendiente y ordenada en el origen) y su posición relativa.

Ejercicio 2 (1 punto)

Asocia a cada recta su ecuación:



Recta	Letra asociada
$y = 2,5$	
$y = \frac{4}{7}x$	
$y = \frac{-3x+10}{5}$	
$y = 2x-3$	

Ejercicio 3 (1,5 puntos)

Un corredor sale del kilómetro 2 de una maratón con una velocidad de 9 km/h.

Tiempo (horas)	0	1	2	3	4	5
Distancia (al km 0)						

- Completa la tabla.
- Escribe la expresión algebraica de la función y represéntala gráficamente.
- ¿Cuál es su ordenada en el origen? ¿Qué significado tiene?
- ¿Qué distancia habrá recorrido en 7 horas?

Ejercicio 4 (1,5 puntos)

Determina la expresión algebraica de la función que pasa por los puntos A(0,-3) y B(3,5). ¿Pasa la recta por el punto C(2,5)?

Ejercicio 5 (1,5 puntos)

Halla la ecuación de la recta:

- paralela al eje X y que pasa por A (1,3)
- que tenga pendiente 4 y ordenada en el origen - 0,5.
- que tenga igual pendiente que $3x + 2y = 6$ y pase por B (-2,3)

Ejercicio 6 (1,5 puntos)

Para celebrar la fiesta de fin de curso, un grupo de amigos alquila un local, y eligen entre dos locales cuyas ofertas son:

Camelot: 1.000 € por el alquiler del local y 5 € por asistente.

Morgana: 200 € por el alquiler del local y 10 € por asistente.

La capacidad máxima en ambos locales es de 300 personas, ¿cuál de ellos elegirías?

8.3. Cuestiones y comportamientos esperados

A continuación, se exponen los métodos de resolución y errores esperados de los estudiantes de los dos grupos a la hora de resolver las 3 cuestiones en común:

Cuestión 1
Dadas las rectas: a) $5x + 2y = -1$ b) $4x - y = 7$ Determina sus características (crecimiento, pendiente y ordenada en el origen) y su posición relativa.

Con el fin de determinar las características de las rectas, se espera que los alumnos del aula ordinaria despejen la y de la ecuación implícita y que indiquen las características de cada una de las dos rectas sin necesidad de dibujarlas. Para especificar su posición relativa, se prevé que la mayoría resuelve algebraicamente el sistema de ecuaciones para hallar el punto de corte y que algunos de ellos se apoyen en gráficas.

En cuanto a los estudiantes del aula de excelencia, se espera que, al igual que sus compañeros del grupo ordinario, despejen la y de la ecuación implícita y que especifiquen sus características a partir de la expresión algebraica. Respecto a la posición relativa, se supone que resuelven tal y como se ha hecho hincapié en clase, es decir, razonando que al tener distinta pendiente las rectas necesariamente se tienen que cortar. Se prevé que la mayoría se decante por este método en lugar de hallar la posición relativa por el método de representación de funciones o algebraicamente porque si han indicado las características ya tienen su pendiente y sólo necesitan razonar en un par de líneas.

A la hora de resolver este ejercicio se espera que los estudiantes cometan ciertos errores como por ejemplo: no despejar la variable dependiente para el cálculo de la ordenada en el origen y la pendiente, cálculo del punto de corte y no especificación de que las rectas son secantes, operar incorrectamente los sistemas de ecuaciones, etc.

Cuestión 2
Halla la ecuación de la recta: a) paralela al eje X y que pasa por A (1,3) b) que tenga pendiente 4 y ordenada en el origen - 0,5. c) que tenga igual pendiente que $3x + 2y = 6$ y pase por B (-2,3)

Para calcular la recta del apartado a) se espera que los estudiantes de ambos grupos o bien razonen que la pendiente es 0 (por tanto la $m=0$ y la ecuación recta es $y=3$ porque pasa por el punto $A(1,3)$) o bien deduzcan la ecuación de la recta dibujando sus condicionantes.

Respecto al apartado b) se prevé que los alumnos de ambas clases por unanimidad y sin dificultades calculen la recta tomando la $m=4$ y la $n=-0,5$ y sustituyan en la ecuación $y=mx+n$.

En el apartado c) se supone que todos los estudiantes realizan el ejercicio despejando de la ecuación la y para tomar el coeficiente que acompaña a la x como pendiente. Puede que algún alumno tome como pendiente el valor 3 sin tener en cuenta que la ecuación viene dada de forma implícita. Una vez calculada la pendiente, resuelven la ecuación sustituyendo en la fórmula general el punto para obtener la n , ordenada en el origen ($3 = \frac{-3}{2} \cdot (-2) + n$). El hecho de que la pendiente y la coordenada x del punto sea negativa puede provocar que cometan errores además puede que algún estudiante confunda las coordenadas del punto a la hora de sustituir en la fórmula.

No se espera que las ecuaciones de la rectas la resuelvan usando el método gráfico, aunque puede que representen las rectas porque les resulta de ayuda para comprobar si lo están haciendo bien una vez que lo han resuelto algebraicamente.

Cuestión 3

Para celebrar la fiesta de fin de curso, un grupo de amigos alquila un local, y eligen entre dos locales cuyas ofertas son:

Camelot: 1.000 € por el alquiler del local y 5 € por asistente.

Morgana: 200 € por el alquiler del local y 10 € por asistente.

La capacidad máxima en ambos locales es de 300 personas, ¿cuál de ellos elegirías?

Se espera que los alumnos y alumnas de ambos grupos calculen las ecuaciones de las rectas identificando correctamente la variable dependiente e independiente. Sin embargo, puede que no indiquen cuál es el significado de cada variable (por ejemplo x número de asistentes e y precio). Además se prevé que acudan al método algebraico para representar los datos del problema y razonar lo que se les pide en función del número de asistentes. Se espera que algunos de los estudiantes se apoyen en gráficos para comprobar los resultados. Es posible que haya algún estudiante que represente las rectas de manera infinita sin tener en cuenta que para los valores negativos y a partir de la $x=300$, el enunciado no tiene sentido. Para calcular el punto de corte de las dos rectas, se espera que la mayoría de estudiantes empleen el método algebraico ya que es el más preciso. También es probable que haya alumnos que no razonen según el número de asistentes o que olviden alguno de los tramos en los que se divide el problema; $n^\circ \text{ personas} < x_{\text{corte}}$, $n^\circ \text{ personas} = x_{\text{corte}}$ y $n^\circ \text{ personas} > x_{\text{corte}}$. Se espera que en los tramos $n^\circ \text{ personas} < x_{\text{corte}}$ y $n^\circ \text{ personas} > x_{\text{corte}}$, argumenten correctamente el local a elegir, visualizando la posición relativa de las rectas o por el método algebraico dando un valor concreto de x para comparar el precio de ambos locales. En cuanto a la decisión de que cuando acuden $n^\circ \text{ personas} = x_{\text{corte}}$ da igual cuál de los dos elegir, puede que haya alumnos que no lo indiquen o que incluyan este caso en uno de los otros dos ($n^\circ \text{ personas} < x_{\text{corte}}$, $n^\circ \text{ personas} > x_{\text{corte}}$).

8.4. Resultados

Se realiza un estudio en el que se comparan los métodos de resolución y errores cometidos por los estudiantes del grupo ordinario y del grupo de excelencia. Adicionalmente, se realiza el mismo análisis comparando por sexos las producciones del alumnado. Las siguientes tablas y gráficas presentan los resultados obtenidos en cada uno de los ejercicios:

Ejercicio 1

A continuación se presentan los 8 tipos de errores que cometen los estudiantes de ambas clases en la realización del ejercicio 1 del examen:

Error tipo 1: No se indica la posición relativa de las rectas. Se resuelve el sistema algebraica o gráficamente, constatando que las rectas se cortan en un punto pero no se explicita que las rectas son secantes.

Voy a hallar la posición relativa en el método de reducción (sistema)

$$\begin{aligned} -y &= \frac{5x}{2} + \frac{1}{2} & y &= 4 - 7 \\ y &= 4x - 7 & y &= -3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{13x}{2} - \frac{13}{2} \\ -\frac{13x}{2} &= -\frac{13}{2} \end{aligned}$$

La posición relativa es (1, -3).

$$13x = 13$$

$$x = 1$$

Error tipo 2: No se despeja la variable dependiente a partir de la ecuación de la recta dada de forma implícita para el cálculo de la pendiente, ordenada en el origen y crecimiento de la función.

② $5x + 2y = -1 \rightarrow -2y = 5x + 1$

Crecimiento \rightarrow Es una recta creciente \times

Pendiente \rightarrow \times

Ordenada en el origen \rightarrow \times

025

Error tipo 3: Errores en la operatoria.

①

$$\begin{aligned} 5x + 2y &= -1 \\ 4x - y &= 7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= 4x - 7 \\ y &= \frac{-1 - 5x}{2} \end{aligned}$$

$$y = \frac{-1 - 5x + 14}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

$$\begin{aligned} -1 - 5x &= 4x - 7 \\ -1 - 5x &= 8x - 14 \\ -13x &= 13 \\ x &= -1 \end{aligned}$$

$$y = \frac{-1 - 5(-1)}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

Error tipo 4: No se identifica la pendiente, ordenada en el origen y crecimiento de la función a partir de la ecuación de la recta en forma explícita.

(1)

$$\begin{aligned} 5x + 2y &= -1 \\ 4x - y &= 7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= 4x - 7 \\ y &= \frac{-1 - 5x}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{-1 - 5x}{2} &= 4x - 7 \\ -1 - 5x &= 8x - 14 \\ -13x &= -13 \\ x &= +1 \end{aligned}$$

$$y = \frac{-1 - 5 \cdot (+1)}{2} = \frac{-6}{2} = -3$$

x/y
1/1

a) Crecimiento: 1 recta \rightarrow decreciente
2 recta \rightarrow creciente

b) Pendiente: 1 recta \rightarrow $-\frac{5}{2}$
2 recta \rightarrow 4

c) O. origen: 1 recta \rightarrow $-\frac{1}{2}$
2 recta \rightarrow 7

Error tipo 5: Razonamiento incompleto o incorrecto de rectas secantes.

- la posición relativa entre las dos rectas es secante, ya que la m y la n son diferentes. Es decir, si tuviere misma m y n sería coincidente, si tuviere misma m para diferente n sería paralela. Pero como tiene diferente m y n es secante.

Error tipo 6: Copiar mal del paso anterior o del enunciado.

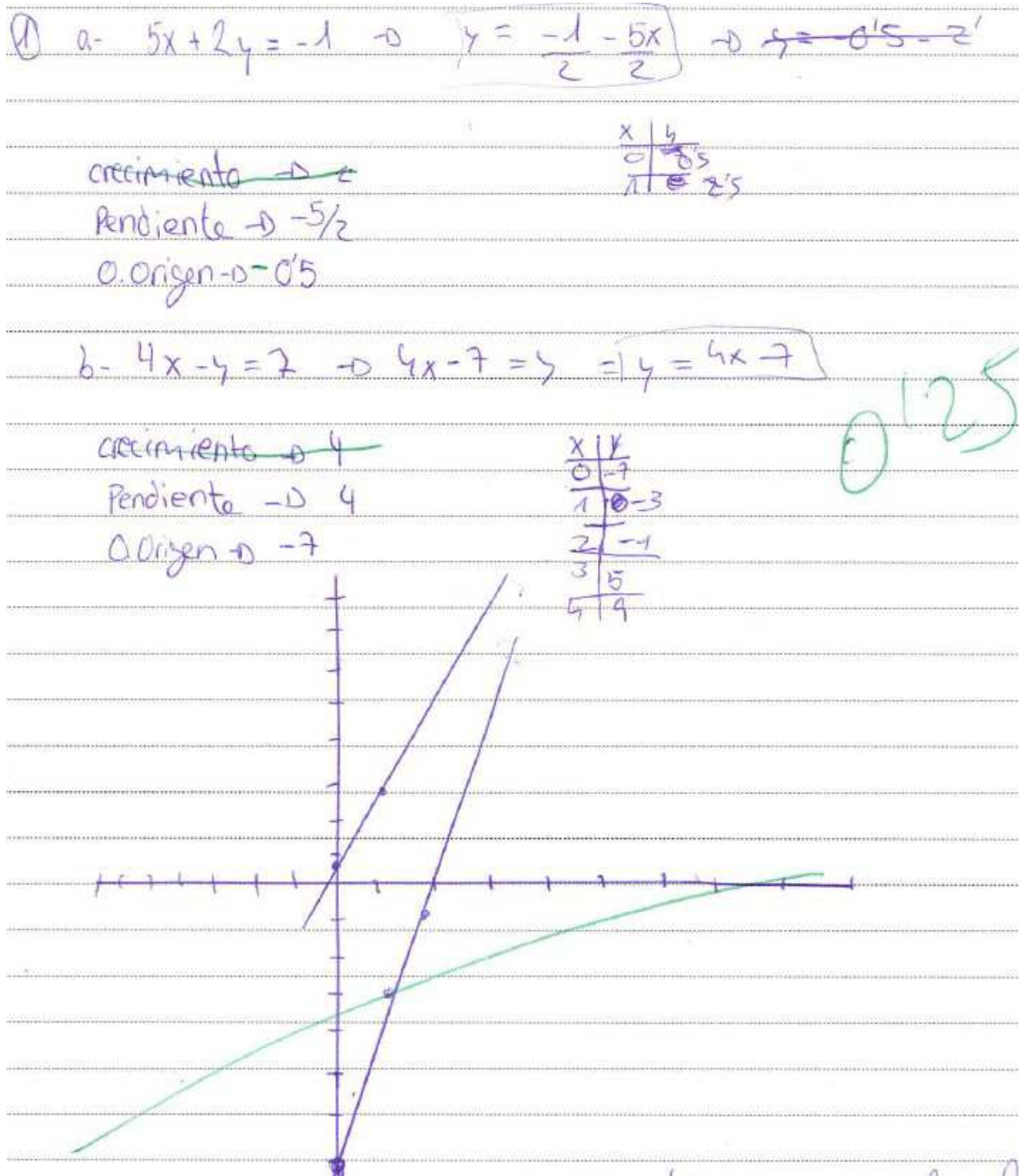
1.-Dadas las rectas: (3 pts)

a) $5x + 2y = -1$

b) $4x - y = 7$

$$\begin{cases} 5x + 2y = -1 \\ 4x - y = 7 \end{cases}$$

Error tipo 7: Representación gráfica de una recta incorrecta.

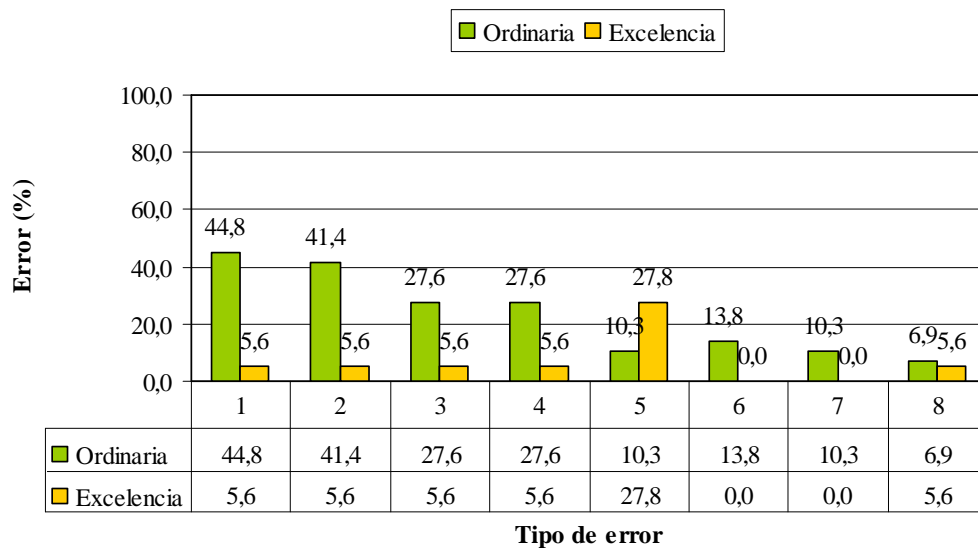


Error tipo 8: El sistema algebraico se resuelve incorrectamente mediante el método de reducción.

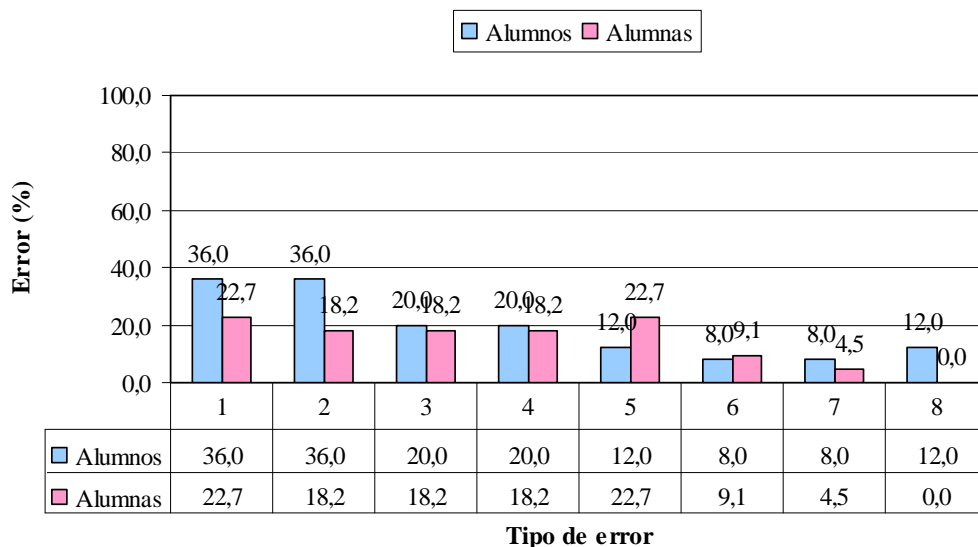
$$\begin{array}{r}
 2y = -5x - 1 \\
 -y = 4x - 7 \\
 \hline
 y = -9 + 6
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 5x + 2y = -1 \\
 4x - y = 7 \\
 \hline
 x + 3y = -8 \\
 x = -8 - 3y
 \end{array}$$

Ejercicio 1				
Tipo de error	% error Ordinaria	% error Excelencia	% error Alumnos	% error Alumnas
1	44,8	5,6	36,0	22,7
2	41,4	5,6	36,0	18,2
3	27,6	5,6	20,0	18,2
4	27,6	5,6	20,0	18,2
5	10,3	27,8	12,0	22,7
6	13,8	0,0	8,0	9,1
7	10,3	0,0	8,0	4,5
8	6,9	5,6	12,0	0,0

EJERCICIO 1: Distribución errores por aulas



EJERCICIO 1: Distribución errores por sexos



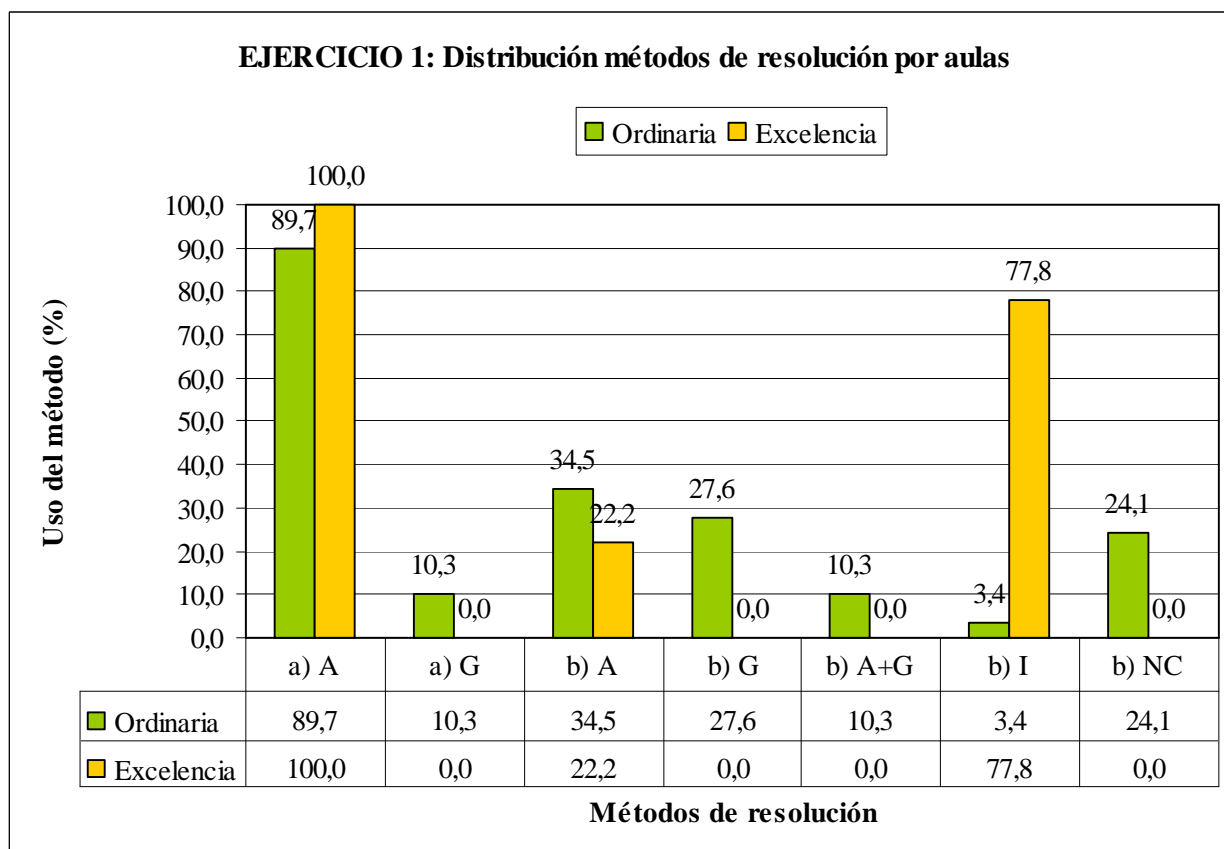
Métodos de resolución y errores en problemas de funciones lineales y afines del alumnado de 3º ESO del aula ordinaria y del aula de excelencia

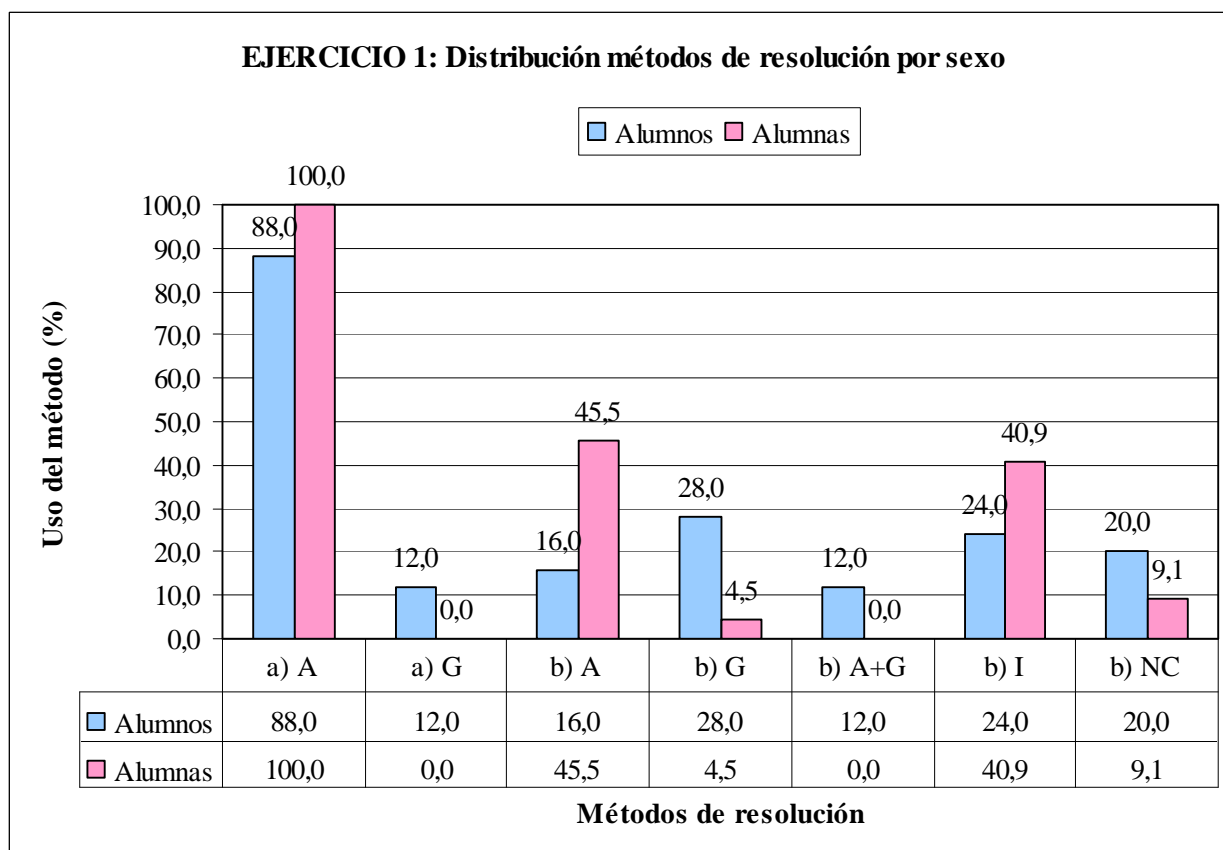
Los estudiantes de ambos grupos resuelven el ejercicio 1 de los siguientes modos:

Apartado a): características de la recta: de manera algebraica (A) o gráfica (G).

Apartado b): posición relativa de las rectas: de manera algebraica (A), gráfica (G), mediante una combinación de las dos (A+G) o de manera intuitiva (I), es decir, razonando que al tener distintas pendientes se cortan en un punto. Algunos de los estudiantes del aula ordinaria no contestan este apartado (NC).

Ejercicio 1					
Apartado	Método de resolución	% Ordinaria	% Excelencia	% Alumnos	% Alumnas
a)	A	89,7	100,0	88,0	100,0
	G	10,3	0,0	12,0	0,0
b)	A	34,5	22,2	16,0	45,5
	G	27,6	0,0	28,0	4,5
	A+G	10,3	0,0	12,0	0,0
	I	3,4	77,8	24,0	40,9
	NC	24,1	0,0	20,0	9,1





Ejercicio 2

En el ejercicio 2 del examen existen 8 tipos de errores cometidos por los estudiantes de ambos grupos, 3 de ellos son comunes al ejercicio 1:

Error tipo 1: Sustitución incorrecta de puntos en ecuación de la recta dada de forma explícita.

$$\begin{aligned}
 c) \quad 3x + 2y &= 6 & y &= mx + n & \text{punto} &\rightarrow (-2, 3) \\
 2y &= -3x + 6 & y &= -\frac{3}{2}x + n \\
 y &= -\frac{3}{2}x + \frac{6}{2} & -2 &= -\frac{3}{2} \cdot (3) + n \\
 \text{recta} \rightarrow y &= -\frac{3}{2}x + 2,5 & -2 &= -\frac{9}{2} + n \\
 & & -2 + \frac{9}{2} &= n \\
 & & 2,5 &= n
 \end{aligned}$$

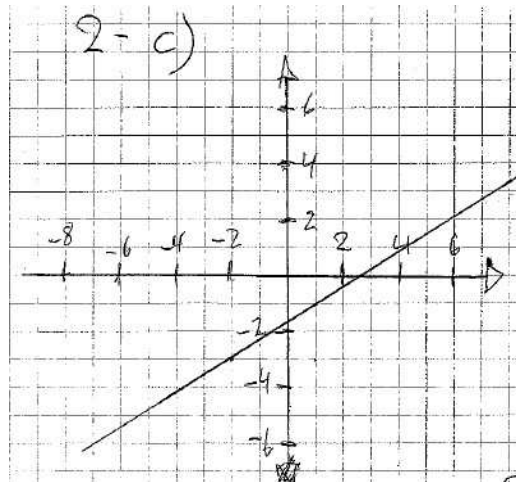
Error tipo 2: No se despeja la variable dependiente a partir de la ecuación de la recta dada de forma implícita para el cálculo de la pendiente, ordenada en el origen y crecimiento de la función. (Igual que en el ejercicio 1).

Error tipo 3: Errores en la operatoria. (Igual que en el ejercicio 1).

Métodos de resolución y errores en problemas de funciones lineales y afines del alumnado de 3º ESO del aula ordinaria y del aula de excelencia

Error tipo 4: Cálculo impreciso de ordenada en el origen a través del método gráfico.

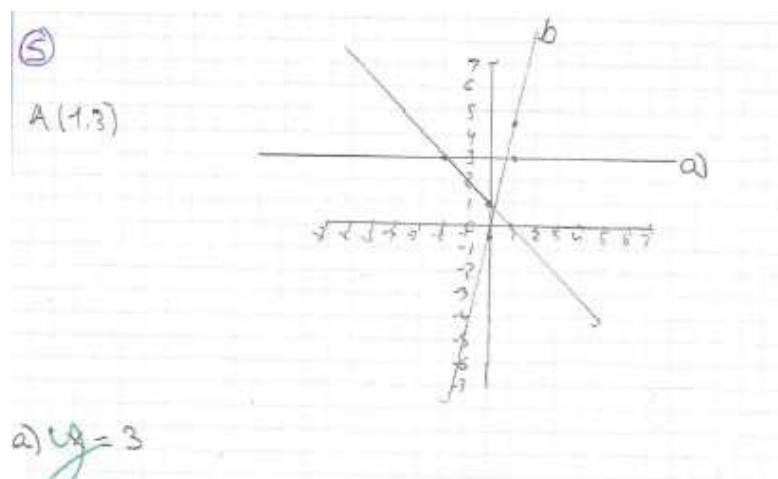
c) $3x + 2y = 6$ $2y = -3x + 6$
 $c) \rightarrow \frac{-3}{2} \times (-1,7)$ $y = \frac{-3}{2}x + 3$
 \approx



Error tipo 5: Confusión entre ordenada en el origen y pendiente.

b) $y = -0.5x + 4$

Error tipo 6: Confusión de recta horizontal con recta vertical.

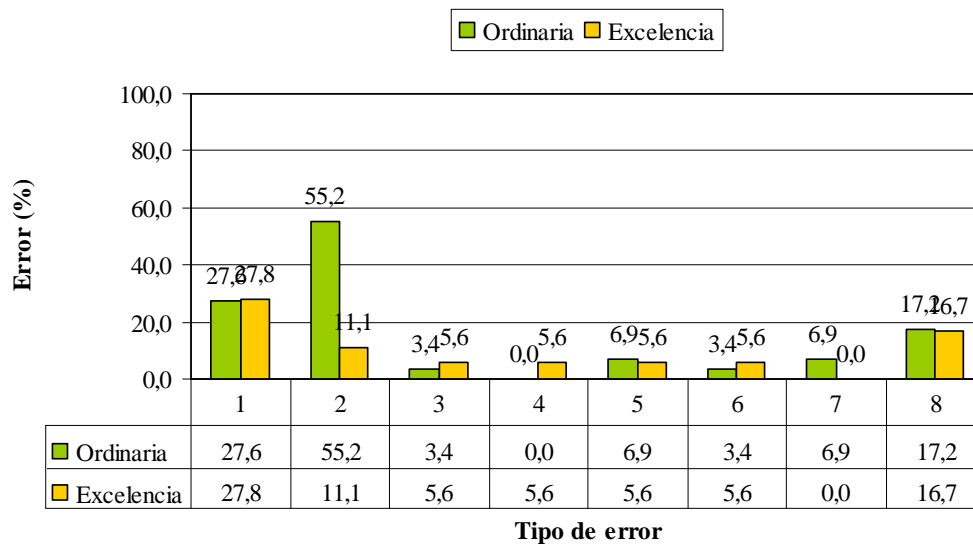
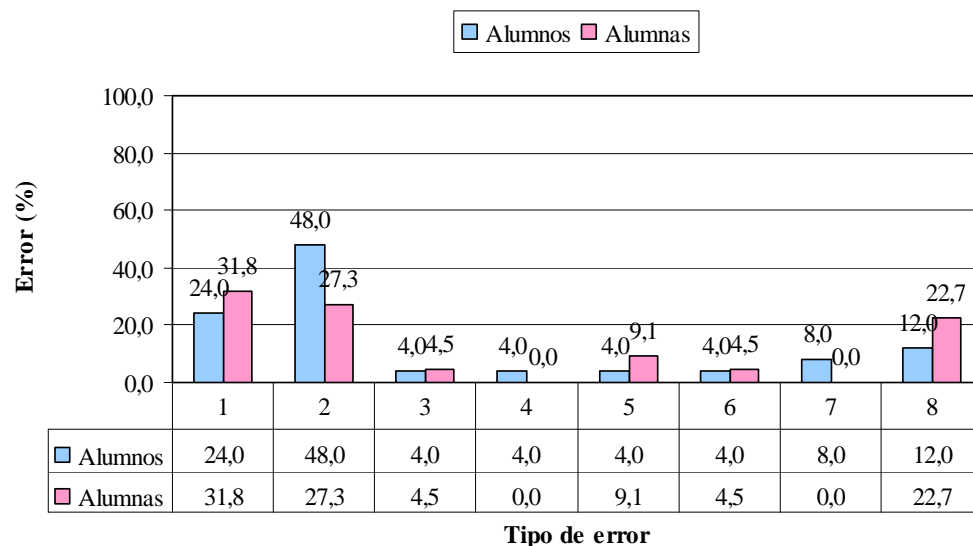


Error tipo 7: Representación gráfica de una recta incorrecta. (Igual que en el ejercicio 1).

Error tipo 8: Interpretación incorrecta de ordenada en el origen.

$$b) y = mx + n$$
$$y = 4x + 0.5$$

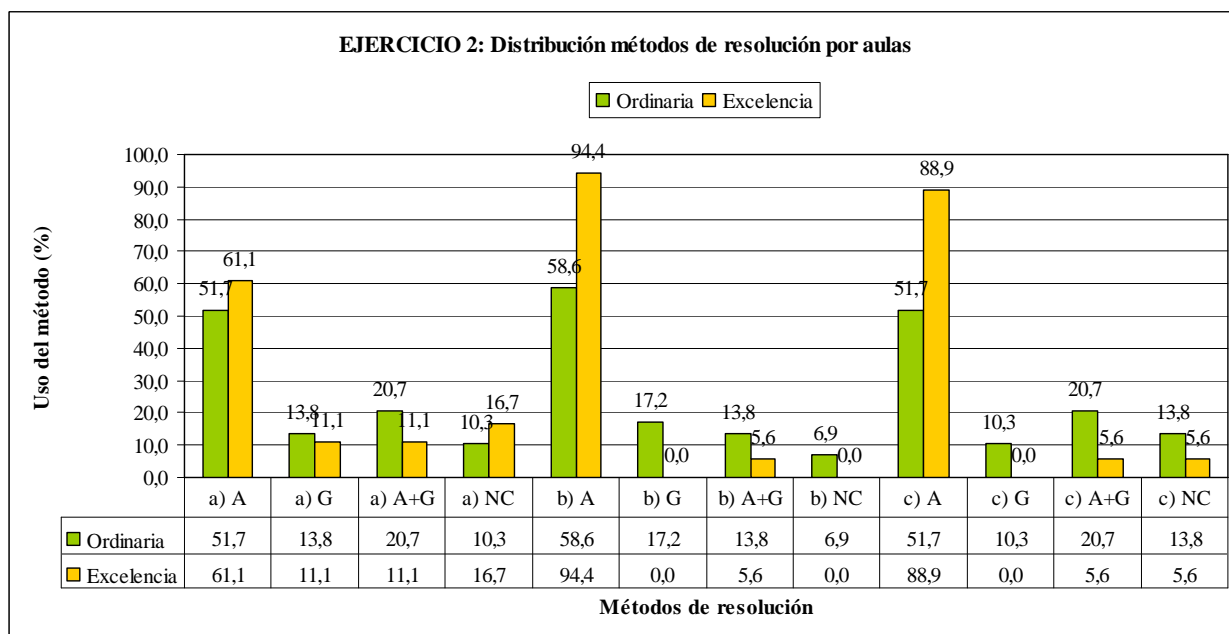
Ejercicio 2				
Tipo de error	% error Ordinaria	% error Excelencia	% error Alumnos	% error Alumnas
1	27,6	27,8	24,0	31,8
2	55,2	11,1	48,0	27,3
3	3,4	5,6	4,0	4,5
4	0,0	5,6	4,0	0,0
5	6,9	5,6	4,0	9,1
6	3,4	5,6	4,0	4,5
7	6,9	0,0	8,0	0,0
8	17,2	16,7	12,0	22,7

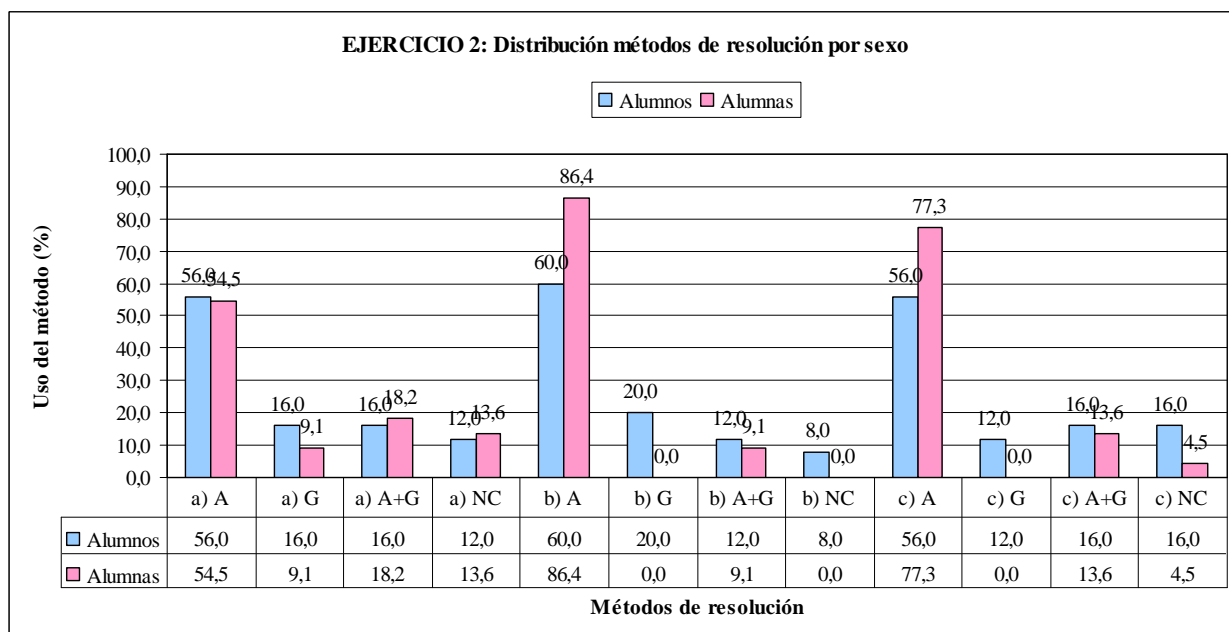
EJERCICIO 2: Distribución errores por aulas**EJERCICIO 2: Distribución errores por sexos**

Métodos de resolución y errores en problemas de funciones lineales y afines del alumnado de 3º ESO del aula ordinaria y del aula de excelencia

Los alumnos de ambas aulas resuelven el ejercicio 2 de manera algebraica (A), gráfica (G) o mediante una combinación de las dos (A+G). Algunos estudiantes no contestan alguno de los apartados de este ejercicio (NC).

Ejercicio 2					
Apartado	Método de resolución	% Ordinaria	% Excelencia	% Alumnos	% Alumnas
a)	A	51,7	61,1	56,0	54,5
	G	13,8	11,1	16,0	9,1
	A+G	20,7	11,1	16,0	18,2
	NC	10,3	16,7	12,0	13,6
b)	A	58,6	94,4	60,0	86,4
	G	17,2	0,0	20,0	0,0
	A+G	13,8	5,6	12,0	9,1
	NC	6,9	0,0	8,0	0,0
c)	A	51,7	88,9	56,0	77,3
	G	10,3	0,0	12,0	0,0
	A+G	20,7	5,6	16,0	13,6
	NC	13,8	5,6	16,0	4,5





Ejercicio 3

A la hora de solucionar el ejercicio 3 del examen, los estudiantes cometen los siguientes 8 errores:

Error tipo 1: Interpretación incorrecta del enunciado: resuelven el ejercicio suponiendo que al local acuden 300 personas (la capacidad máxima).

⑥

Camelot $\rightarrow 1000 + 300 \cdot 5 = 2500 \text{ €}$ los cuestan al local

Migra $\rightarrow 200 + 300 \cdot 10 = 3200 \text{ €}$ los cuestan en total

- Yo elegiría Camelot, porque te cuestan ~~700 €~~ menos al local

Error tipo 2: No se plantea la ecuación de la recta que modeliza el problema.

6-

Camelot: $300 \cdot 5 + 1000 = 2.500 \text{ €}$ cuestan

Migra: $300 \cdot 10 + 200 = 3.200 \text{ €}$ cuestan

Es mejor Camelot porque cuestan menos suponiendo que invitan a las 300 personas

Error tipo 3: No se indica el significado de cada variable.

③

A) Camelot 1000 € Alquiler + 5 € Asistente
 b) Morgana 200 € Alquiler + 10 € por asistente

300 Asistentes máximo

A) $1000 + (300 \cdot 5) = 2500$ €
 b) $200 + (10 \cdot 300) = 3200$

$$\begin{cases} Y = 5X + 1000 \\ Y = 10X + 200 \end{cases}$$

$$0 = -5X + 800$$

$$\begin{aligned} 5X &= 800 \\ X &= \frac{800}{5} = 160 \end{aligned}$$

$$Y = 1800$$

$$Y = (5 \cdot 160) + 1000$$

$$Y = 1800$$

R= A partir de los 160 Asistentes, cogería el Camelot, porque a partir de esos asistentes sale más barato, pero si el número fuese menor que 160 asistentes, iría al Morgana, que saldría más barato. Si fueren 160 asistentes justos daría lo mismo, porque me cobrarían igual en ambos sitios. (160, 1800) es el punto donde se cortan las rectas.

Error tipo 4: No se razona la idoneidad de un local u otro generalizando en función del número de asistentes.

6-Camelot → Total: 2500 €
 Morgana → Total: 4000 €
 (con 300 p.)

Si quieres llenar el local saldría mejor Camelot, por 2500 € (con el aforo completo), pero si vas a ir con tus amigos (20/30 pers.) saldría mejor Morgana, ya que con 20 personas saldría por 400 € total.

Error tipo 5: No se razona que para cierto número de asistentes es indiferente que local escoger.

(3)

Camelar: $y = 5x + 1000$ $x = 1^{\text{er}}$ persona

$y = \text{€ total}$

$y = 5 \cdot 300 + 1000$

$y = 2.500 \text{ € por } 300 \text{ personas}$

Hergana: $y = 10x + 200$

$y = 10 \cdot 300 + 200$

$y = 3.200 \text{ € por } 300 \text{ personas}$

• Para averiguar a partir de qué punto es mejor elegir un local que otro hacemos un sistema de ecuaciones:

$y = 10x + 200$

$- y = 5x + 1000$

$/ = 5x - 800$

$800 = 5x$

$\frac{800}{5} = x = 160$

Punto de corte: $(160, 1.800)$

$y = 5 \cdot 160 + 1000$

$y = 1.800$

Es decir, a partir de 160 personas saldrá más económico el local Hergana Camelar pero si alquilan ~~más~~ ^{mejor} de 160 personas, será mejor el Hergana.

Error tipo 6: No se resuelve el sistema ni de manera algebraica ni gráficamente para calcular el punto de corte de las dos rectas.

6-

Datos:

Para la fiesta, hay dos locales:

$$A = 1000 \text{ €} + 5 \text{ € / asistente}$$

$$B = 200 \text{ €} + 10 \text{ € / asistente}$$

Max de personas de A y B = 300 personas

$$A = y = mx + n \rightarrow m = 5 \text{ € / asistente}$$

$$y = 5x + 1000 \rightarrow \text{lo voy a sustituir por 300 asistentes me da lo que vale el local.}$$

$$y = 5 \cdot 300 + 1000 = 1500 + 1000 = 2500 \text{ € los costes}$$

$$B = y = mx + n \rightarrow m = 10 \text{ € / asistente}$$

$$y = 10x + 200 \rightarrow 200 \text{ € vale el local}$$

$$y = 10 \cdot 300 + 200$$

$$y = 3000 + 200 = 3200 \text{ € los costes}$$

conclusión: Yo eligiré el camelot, aunque sea si son muchas personas y lo van a llenar entero, porque si son 30 personas, por ejemplo:

A:

$$y = mx + n$$

$$y = 5 \cdot 30 + 1000 = 150 + 1000 = 1150$$

B:

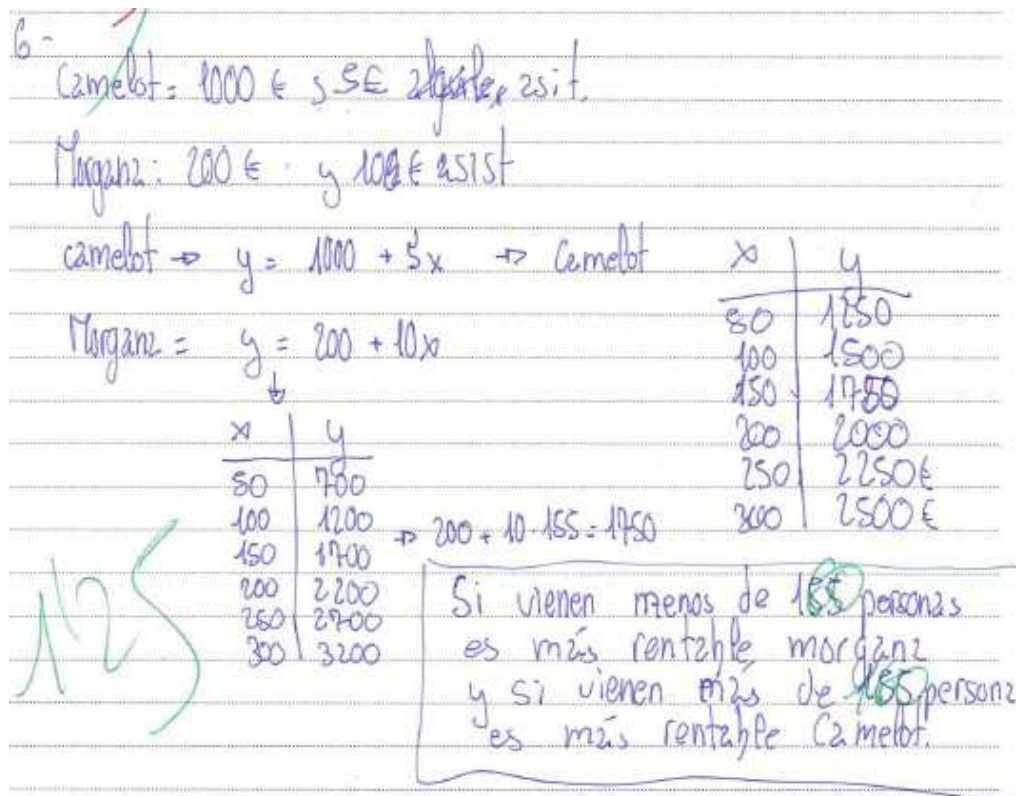
$$y = mx + n$$

$$y = 10 \cdot 30 + 200$$

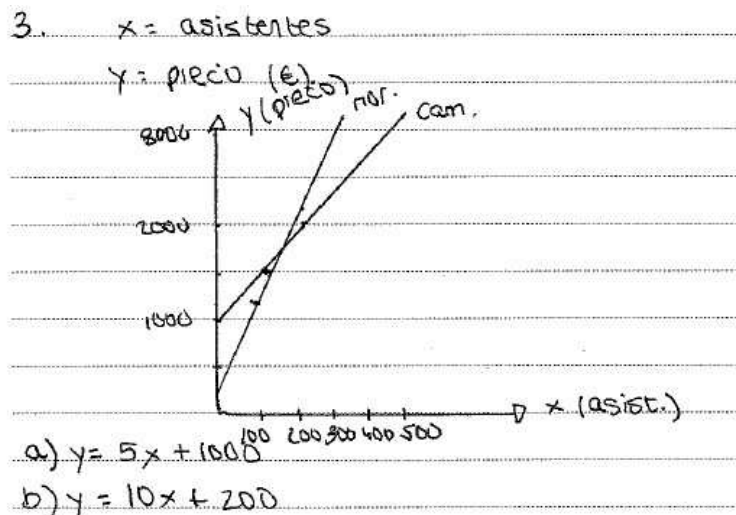
$$y = 300 + 200 = 500 \text{ €} \rightarrow \text{Si solo son 30 personas, sería mejor opción el Margen}$$

La conclusión es, en conclusión si son muchas gente, es mejor elegir el camelot, pero, por ejemplo, si son 30 personas, es mejor el Margen

Error tipo 7: Cálculo por tanteo a través de tablas del punto de corte de las dos rectas.



Error tipo 8: Cálculo incorrecto del punto de corte por el método gráfico.

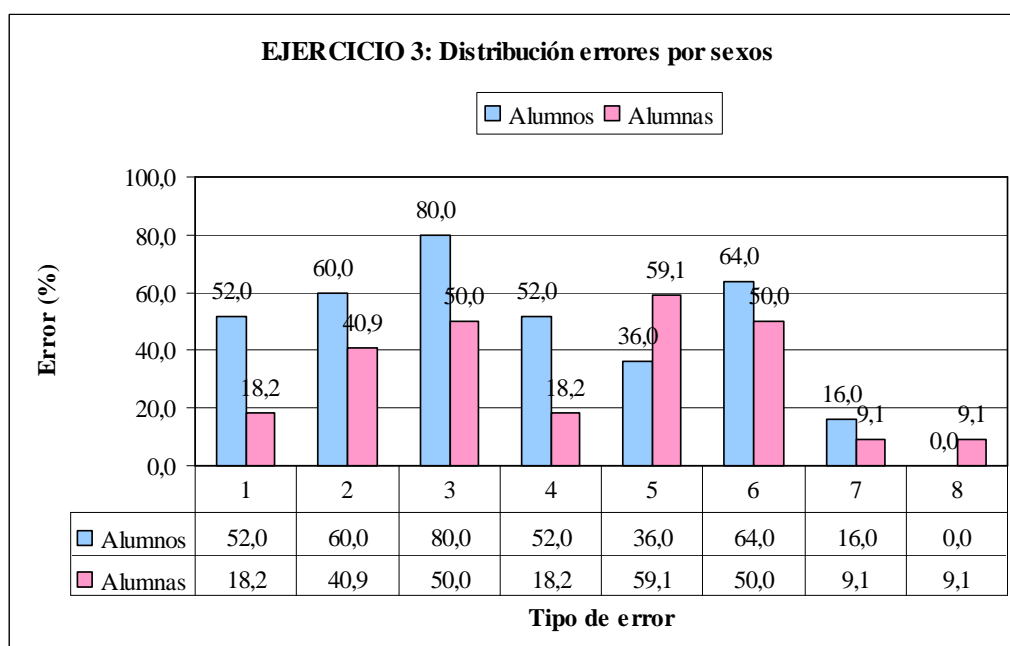
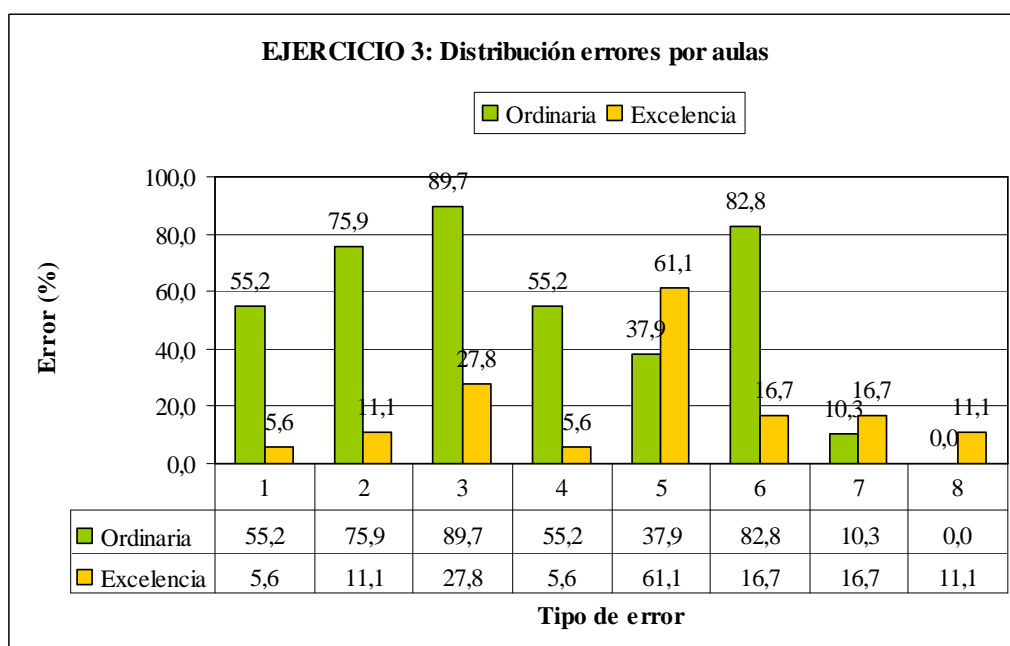


3. Por debajo de los 200 asist. resulta más barato Marganz pero por encima te sale más económica Camelot.

Con 300 asistentes ya elegía Camelot.

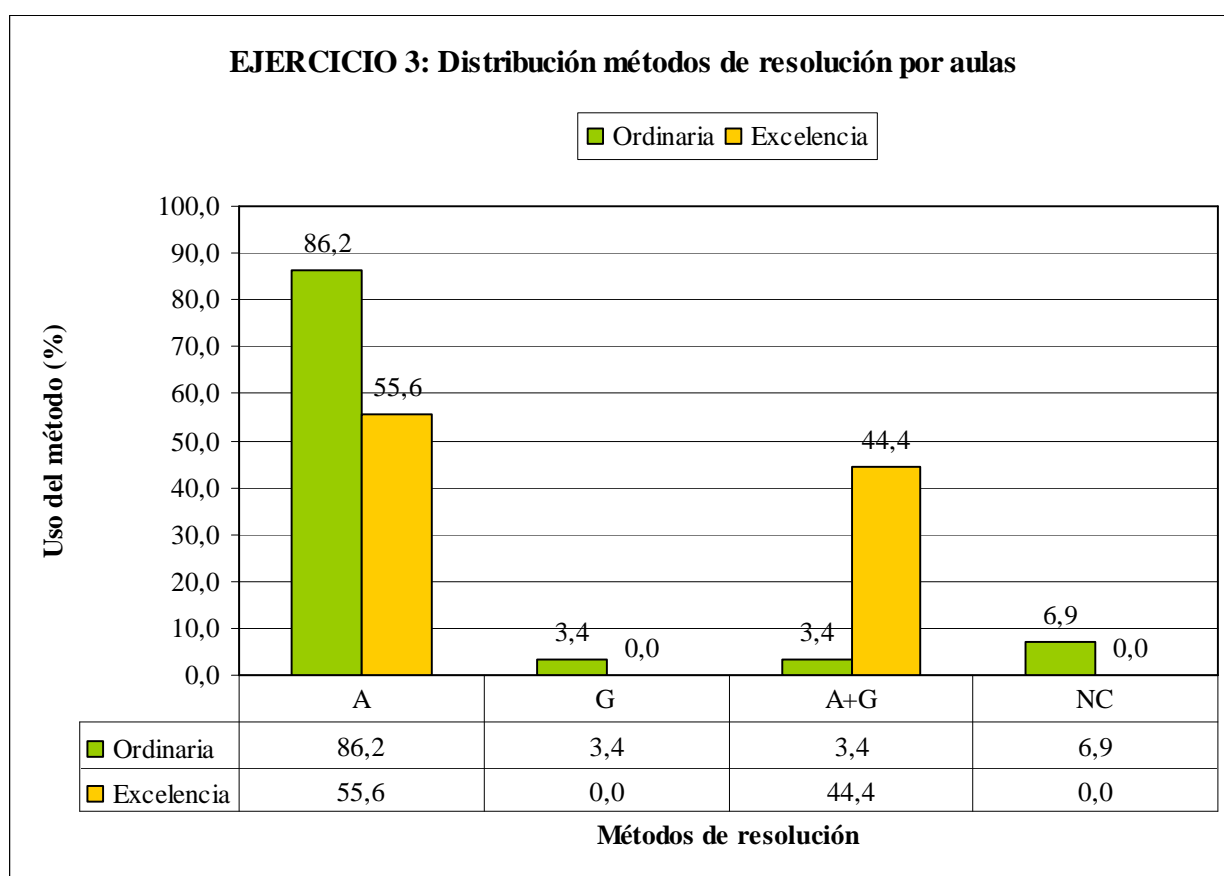
Métodos de resolución y errores en problemas de funciones lineales y afines del alumnado de 3º ESO del aula ordinaria y del aula de excelencia

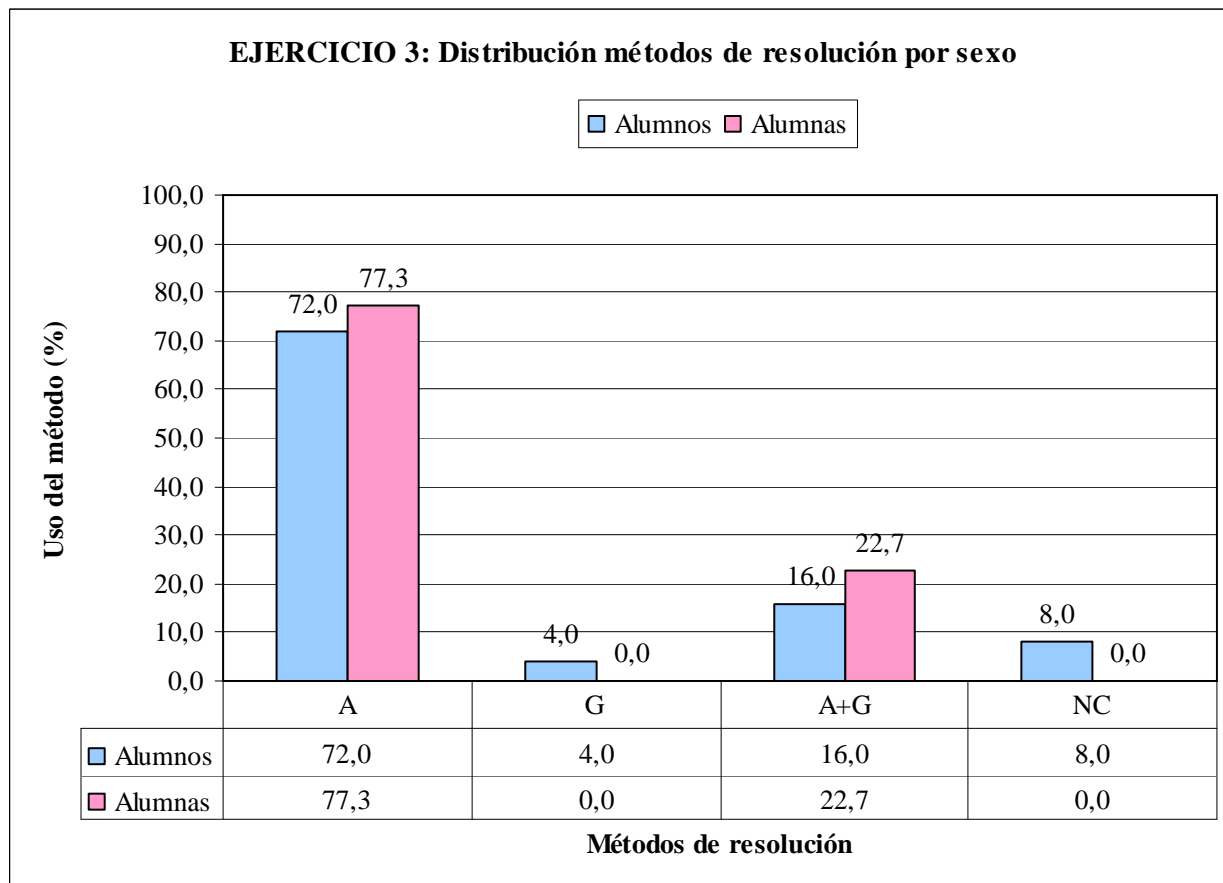
Ejercicio 3				
Tipo de error	% error Ordinaria	% error Excelencia	% error Alumnos	% error Alumnas
1	55,2	5,6	52,0	18,2
2	75,9	11,1	60,0	40,9
3	89,7	27,8	80,0	50,0
4	55,2	5,6	52,0	18,2
5	37,9	61,1	36,0	59,1
6	82,8	16,7	64,0	50,0
7	10,3	16,7	16,0	9,1
8	0,0	11,1	0,0	9,1



El ejercicio 3 es resuelto por los estudiantes de ambas clases de manera algebraica (A), gráfica (G) o mediante una combinación de las dos (A+G). Algunos de los estudiantes del aula ordinaria no contestan este ejercicio (NC).

Ejercicio 3				
Método de resolución	% Ordinaria	% Excelencia	% Alumnos	% Alumnas
A	86,2	55,6	72,0	77,3
G	3,4	0,0	4,0	0,0
A+G	3,4	44,4	16,0	22,7
NC	6,9	0,0	8,0	0,0





A continuación, se exponen dos tablas en las que se presenta las notas medias (sobre 10 puntos) de las 3 cuestiones del examen estudiadas por clases y por sexos:

Grupo	Sexo	Media Ejercicio 1	Media Ejercicio 2	Media Ejercicio 3
Ordinario	F	3,77	5,00	0,40
	M	3,58	4,73	1,13
Media total Ordinario		3,64	4,80	0,87
Excelencia	F	8,42	6,53	6,60
	M	9,11	7,00	6,20
Media total Excelencia		8,61	6,67	6,53

Categoría	Media Ejercicio 1	Media Ejercicio 2	Media Ejercicio 3	Media TOTAL
Ordinario	3,64	4,80	0,87	3,10
Excelencia	8,61	6,67	6,53	7,27
Alumnas	6,52	5,91	4,06	5,49
Alumnos	4,69	5,20	2,13	4,01

8.5. Discusión de los resultados

En el ejercicio 1 del examen se constata que los estudiantes de la clase ordinaria cometen más errores que los de la clase de excelencia. Los errores que se producen con más frecuencia en el aula ordinaria son: con un 44,8% no indicar la posición relativa de las rectas (secantes), especificando sólo el punto de corte, y no despejar la variable dependiente para el cálculo de la ordenada en el origen, pendiente y crecimiento de la función (41,4%). Los siguientes fallos más cometidos en este grupo con un 27,6% son errores al operar y teniendo la expresión algebraica en forma explícita no indicar correctamente la pendiente, ordenada en origen y crecimiento de la recta. Sin embargo, en la clase de la excelencia el error que cometen con más frecuencia (27,8%) es no razonar completa y correctamente cuando dos rectas son secantes. No resulta extraño que sea de esta manera ya que para indicar la posición relativa de estas rectas, el 77,8% de los alumnos de excelencia se decantan por el método “intuitivo” el cual tiene asociado dicho error. Por su parte en la clase ordinaria, los estudiantes lo determinan principalmente mediante el método algebraico (34,5%) y el gráfico (27,6%). Además, en esta clase resultando llamativo que el 24,1% de ellos no contesten este apartado del examen el cual estaba claro que iba ser preguntado ya que así se especifica a los estudiantes y es lo que han trabajado durante el tema. En cuanto a las características de las rectas los estudiantes de ambas clases coinciden en detallar las características a través de la expresión algebraica (89,7% ordinaria y 100% excelencia).

Los estudiantes de excelencia también cometen menos errores que los alumnos del aula ordinaria al resolver el segundo ejercicio del examen. Respecto al fallo más frecuente de los alumnos del aula ordinaria, se observa que un 55,2% se equivocan al calcular la pendiente y ordenada en el origen ya que no despejan la variable independiente. Sin embargo, en la clase de excelencia sólo cometen este error un 11,1%. Casi un 28 % de los estudiantes de ambos grupos sustituyen incorrectamente las coordenadas de los puntos en la ecuación de una recta, siendo éste el fallo más observado en la clase de excelencia y el segundo en la ordinaria. En cuanto a la resolución de los 3 apartados de este ejercicio, los estudiantes de excelencia se decantan mayoritariamente por el método algebraico especialmente en el apartado a) y b) (en torno al 90%). Por su parte, en el aula ordinaria lo eligen entre el 50 y 60% de ellos, los alumnos restantes que realizan este ejercicio se apoyan en gráficas o bien lo realizan íntegramente mediante el método gráfico. Algunos de los estudiantes, en mayor medida los del grupo ordinario, no contestan alguno de los apartados, especialmente los apartados a) y c).

A la hora de solucionar el tercer problema del examen, los estudiantes del grupo ordinario cometen más fallos que los de excelencia. El 75,9% de los alumnos de la clase ordinaria no plantean la expresión algebraica que generaliza el precio de los dos locales según el número de asistentes, el 89,7% no indican el significado de cada variable (precio y nº de asistentes), ni tampoco calculan el punto de corte de las dos rectas un 82,8% para poder razonar que según el número de asistentes es más conveniente escoger un local u otro. Además el 55,2% de ellos interpretan que el enunciado debe resolverse para la capacidad máxima y por tanto no razonan que según el número de asistentes es más idóneo alquilar un local porque resulta más barato que el otro. La mayoría de los estudiantes del grupo de excelencia no cometen estos fallos siendo el error más frecuente, con un 61,1%, que aunque razonen según el número de asistentes no especifican que para una cierta cantidad de personas que acudan (punto de corte de las dos rectas) no importa a que establecimiento acudir porque el precio es el mismo. Respecto a los

Métodos de resolución y errores en problemas de funciones lineales y afines del alumnado de 3º ESO del aula ordinaria y del aula de excelencia

métodos de resolución, el 86,2% de los estudiantes del aula ordinaria abordan este problema mediante el método algebraico, el 6,9% de ellos no realizan este ejercicio y el resto de alumnos se ayudan de las expresiones gráficas de las rectas. Por su parte, el 55,6% de los estudiantes de excelencia resuelven el problema con la expresión algebraica de las rectas y el 44,4% restante además de algebraicamente se apoyan en gráficas para realizar el ejercicio.

En los 2 primeros ejercicios hay 3 errores que se repiten y que se presentan principalmente en la clase ordinaria. Se constata que los alumnos tienen fallos al operar (por ejemplo pasan restando un número que está restando al otro lado del igual, etc.). Además, bastantes estudiantes no despejan la y de la ecuación dada de forma general, $Ax+By=C$, tomando los valores A y C para la pendiente, ordenada en el origen y crecimiento/decrecimiento de la función. Asimismo, se detecta que algunos estudiantes no dibujan correctamente las rectas y puntos a partir de su expresión algebraica.

En general, se detecta que los estudiantes que acuden al aula ordinaria resuelven mejor los ejercicios en los que la consigna es precisa que los relacionados con aplicaciones de las funciones en la vida cotidiana. Esto puede ser debido a que en este grupo no se han trabajado en clase suficientes problemas como los del examen lo cual sí se ha hecho en la clase de la excelencia quedando reflejado en los resultados, notablemente mejores. Además de las dificultades que presentan para modelizar situaciones cotidianas por medio de funciones lineales y afines, se detectan errores en la operatoria así como problemas para identificar las características de una recta a partir de la ecuación de la recta dada de forma implícita. Respecto a los métodos de resolución, principalmente utilizan el método algebraico pero también muchos de los estudiantes se ayudan de la expresión gráfica de la recta para comprobar los resultados tal y como hace la otra profesora en sus sesiones.

Respecto a los estudiantes de la clase de excelencia, el método de resolución por el que se decantan para resolver los ejercicios es fundamentalmente el algebraico, este resultado es el esperado ya que la profesora en las sesiones lo resalta como el más preciso. A pesar de ello, para la modelización del problema de los locales algunos de ellos se apoyan en gráficas que facilitan el razonamiento. Esto tampoco resulta extraño ya que en las sesiones dedicadas al tema en los problemas de aplicación se proyectan las rectas con Geogebra en la pizarra para facilitar el razonamiento y la comprensión. Además, se espera que, tal y como se ha constatado, para el primer ejercicio argumenten que las rectas son secantes porque tienen distinta pendiente ya que aunque se exponen todas las formas posibles de resolver un problema en clase, la profesora indica las ventajas e inconvenientes de cada método y utiliza el método óptimo. En cuanto a los errores cometidos, los estudiantes de excelencia cometen menos fallos (de media 2,89 errores por estudiante en los 3 ejercicios) que sus compañeros de la clase ordinaria (de media 7,10 errores por estudiante en los 3 ejercicios). Una de las razones puede ser que en clase se han trabajado muchos ejercicios y problemas parecidos a los del examen y que los alumnos están más motivados a la hora de atender y estudiar la asignatura.

En cuanto a las notas se refiere, tal y como se esperaba, la media de los 3 ejercicios de los estudiantes de excelencia (7,27) es superior a la de los de ordinaria (3,10), resulta lógico ya que estos cometen menos errores. Además, en cierta medida al estar menos alumnos en clase pueden

avanzar más rápido con la materia y realizar más ejercicios para prepararse para el examen en comparación con sus compañeros que en este sentido se encuentran en clara desventaja. Asimismo, debido a que los ejercicios se disponen a lo largo del examen según su dificultad de manera progresiva, puede que los alumnos del aula ordinaria realicen con menos tiempo o más cansados el segundo y tercer ejercicio que para ellos es el quinto y sexto.

Se realiza el mismo análisis comparativo distinguiendo por sexos ya que resulta llamativo que la clase de excelencia en un 72% esté compuesto por alumnas mientras que la ordinaria sólo un 31%. Tras analizar las gráficas se puede observar que en general las alumnas cometen menos errores (de media 4,68 errores por alumna en las 3 cuestiones) que sus compañeros (de media 6,20 errores por alumno en las 3 cuestiones), por ello también sacan de media mejores notas (5,49 frente a 4,01). Por ello, resulta obvio que la clase de excelencia esté compuesta por más alumnas ya que en ella están los estudiantes que presentan más capacidades y motivación. Respecto a los métodos de resolución, las alumnas en general usan más el método algebraico para resolver los ejercicios que sus compañeros, los cuales aunque emplean la expresión algebraica algunos de ellos también se apoyan más en gráficas que sus compañeras.

Síntesis, conclusiones y cuestiones abiertas

Síntesis

El objetivo principal de este Trabajo Fin de Máster es el de estudiar los métodos de resolución y errores cometidos en los problemas de funciones lineales y afines por el alumnado de 3º ESO, los cuales están separados en dos niveles según sus capacidades demostradas en la asignatura de matemáticas, en el aula ordinaria y el aula de excelencia.

El trabajo se estructura de forma que en la primera parte se hace un análisis de las funciones lineales y afines en el currículo vigente y en los libros de texto para comprobar que éstos se adecuan a la ley. A continuación, en la segunda parte, se analiza el proceso de estudio de las funciones lineales y afines en 3º ESO. Para ello, se estudia el tema en el libro de texto de referencia, se analizan las dificultades y errores previsibles y se expone el proceso de estudio llevado a cabo durante el Prácticum II de especialidad en el aula de excelencia. Seguidamente, se presentan los exámenes escritos realizados por el alumnado de ambas clases al finalizar el tema. Finalmente, se analizan las producciones de los estudiantes en los 3 ejercicios comunes del examen para contrastar los distintos métodos de resolución y errores que cometen ambos grupos con los previstos, así como indicar las posibles causas.

Conclusiones

Una vez realizado el análisis de los métodos de resolución y errores observados en los exámenes, se puede constatar que los estudiantes que cometen menos errores son aquellos que acuden a la clase de excelencia. Además, se aprecia que los alumnos de excelencia tienden a resolver los ejercicios usando únicamente el álgebra por lo que se deduce que su nivel de abstracción es mayor. Por su parte, los estudiantes del aula ordinaria, además de algebraicamente, también se apoyan más en representaciones gráficas para comprobar los resultados de los ejercicios que han realizado, por lo que se detecta que tienen herramientas de control pero que su nivel de abstracción es menor. Consecuentemente, se puede concluir que existe correlación entre los niveles y los métodos de resolución y errores, por lo que la separación en distintos niveles puede parecer pertinente.

Cuestiones abiertas

A partir de los resultados, se comprueba que existe correlación entre los errores y métodos de resolución y los niveles en los que están separados los estudiantes. Sin embargo, no se puede determinar en qué medida los alumnos han sido separados en el grupo de más nivel porque poseen más capacidades matemáticas. O si bien, destacan más que sus compañeros del aula ordinaria porque el número de estudiantes por clase es menor y se les puede atender más personalmente, motivarles más y realizar más actividades porque el ritmo de la clase es más ágil. Adicionalmente, el hecho de separar de un aula ordinaria a aquellos estudiantes que presentan mayores capacidades y motivaciones en la asignatura de matemáticas puede provocar que en el aula no queden alumnos que estimulen al resto y vigoricen la clase, además del efecto psicológico provocado en los estudiantes del aula ordinaria que puede afectar negativamente a su rendimiento. Sin embargo, el grupo de excelencia posee más ventajas ya que están menos alumnos en clase, se les motiva y dedica más tiempo lo cual es muy probable que repercuta positivamente en su rendimiento y seguridad. En base a estas cuestiones, se puede confirmar que determinar la idoneidad de separar a los estudiantes según sus capacidades no es evidente y puede resultar controvertido.

Referencias

Referencias

1. Currículo vigente: Educación Primaria, ESO y Bachillerato.

Etapas	Referencia
Primaria	Ministerio de Educación y Ciencia (2007). ORDEN ECI/2211/2007, de 12 de julio, por la que se establece el currículo y se regula la ordenación de la Educación primaria. BOE 173, de 20 julio, 31487-31566.
ESO	Ministerio de Educación y Ciencia (2007). REAL DECRETO 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria. BOE 5, de 5 enero, 677-773.
Bachillerato	Ministerio de Educación, Política Social y Deporte (2008). ORDEN ESD/1729/2008, de 11 de junio, por la que se regula la ordenación y se establece el currículo del bachillerato. BOE 147, de 18 junio, 27492-27608

2. Libros de texto.

Curso	Referencia
1º ESO	Colera, J., Gaztelu, I. (2007). <i>Matemáticas 1</i> . Madrid: Grupo Anaya.
2º ESO	Uriondo, J.L. (2007). <i>Matemáticas</i> . Madrid: Oxford University Press.
3º ESO	Martínez, B., Montesinos, P., González, F., López, C. (2007). <i>Matemáticas</i> . Madrid: McGraw-Hill.
4º ESO, Ciencias y Tecnología	Álvarez, M.D., Gaztelu, A.M., González, A., Hernández, J., Miranda, A.Y., Moreno, M.R., Parra, S., Redal, E.J., Redondo, M., Redondo, R., Sánchez, M.T., Santos, T., Serrano, E. (2008). <i>Matemáticas 4 ESO Opción B</i> . Madrid: Santillana.
4º ESO, Ciencias Sociales	Álvarez, M.D., Gaztelu, A.M., González, A., Hernández, J., Miranda, A.Y., Moreno, M.R., Parra, S., Redal, E.J., Redondo, M., Redondo, R., Sánchez, M.T., Santos, T., Serrano, E. (2008). <i>Matemáticas 4 ESO Opción A</i> . Madrid: Santillana.
1º Bachillerato, Ciencias y Tecnología	Vizmanos, J.R., Hernández, J., Alcaide, F. (2008). <i>Matemáticas 1</i> . Madrid: Ediciones SM.
1º Bachillerato, Ciencias Sociales	Vizmanos, J.R., Hernández, J., Alcaide, F. (2008). <i>Matemáticas 1 aplicadas a las Ciencias Sociales</i> . Madrid: Ediciones SM.

3. Texto del saber de matemáticas.

Merino, L., Santos, E. (2006). *Álgebra lineal con métodos elementales*. Madrid: Thomson.

4. Texto de didáctica de matemáticas.

Godino, J. D., Font, V., Wilhelmi, M. R. (2006). Análisis ontosemiótico de una lección sobre la suma y la resta. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 9 (Especial), 133–156.

Anexos

A. Unidad didáctica del libro de texto

Métodos de resolución y errores en problemas de funciones lineales y afines del alumnado de 3º ESO del aula ordinaria y del aula de excelencia

B. Unidad didáctica “Funciones lineales y afines” del centro educativo

Asignaturas / Ikasgaiak: Matemáticas	Título de la unidad / Unitatearen izenburua: Funciones lineales y afines
Curso / Ikasturtea: 3º ESO CD	

1. Contexto y conocimientos previos para esa unidad

Testuingurua: Unitate horren aurretiko ezagutzak.

En el tema anterior se explica el concepto de función, gráfica y tabla de valores. Además se tratan las nociones generales de funciones referentes a: dominio, recorrido, continuidad, crecimiento y decrecimiento, extremos absolutos y relativos y simetría.

En otras unidades anteriores se trata la proporcionalidad directa y la resolución de sistemas de 2 ecuaciones lineales con 2 incógnitas.

2. Competencias / Subcompetencias que se trabajan / Objetivos y criterios de evaluación de la unidad didáctica

Lantzen diren gaitasunak /Azpigaitasunak /Unitate didaktikoaren helburuak eta ebaluazio- irizpideak.

COMPETENCIA-SUBCOMPETENCIAS / GAITASUNA-AZPIGAITASUNAK	INDICADORES / ADIERAZLEAK	OBJETIVOS DIDÁCTICOS / HELBURU DIDAKTIKOAK	CRITERIOS DE EVALUACIÓN / EBALUAZIO IRIZPIDEAK
MATEMÁTICA-Operaciones	3.2.4. Utiliza diversas herramientas para hacer operaciones con cualquier expresión numérica.	<p>1. Mejorar la capacidad de pensamiento reflexivo e incorporar al lenguaje y modos de argumentación las formas de expresión y razonamiento matemático, tanto en los procesos matemáticos o científicos como en los distintos ámbitos de la actividad humana.</p> <p>2. Reconocer y plantear situaciones susceptibles de ser formuladas en términos matemáticos, elaborar y utilizar diferentes estrategias para abordarlas y analizar los</p>	<p>2. Expresar mediante el lenguaje algebraico una propiedad o relación dada mediante un enunciado y observar regularidades en secuencias numéricas obtenidas de situaciones reales mediante la obtención de la ley de formación y la fórmula correspondiente, en casos sencillos.</p> <p>A través de este criterio, se pretende comprobar la capacidad de extraer la información relevante de un fenómeno</p>

		<p>resultados utilizando los recursos más apropiados.</p> <p>4. Identificar los elementos matemáticos (datos estadísticos, geométricos, gráficos, cálculos, etc.) presentes en los medios de comunicación, Internet, publicidad u otras fuentes de información, analizar críticamente las funciones que desempeñan estos elementos matemáticos y valorar su aportación para una mejor comprensión de los mensajes.</p> <p>6. Utilizar de forma adecuada la biblioteca y los distintos medios tecnológicos (calculadoras, ordenadores, etc.) tanto para realizar cálculos como para buscar, tratar y representar informaciones de índole diversa y también como ayuda en el aprendizaje.</p> <p>7. Resolver problemas utilizando modos propios de la actividad matemática, tales como la exploración sistemática de alternativas, la precisión en el lenguaje, la flexibilidad para modificar el punto de vista o la perseverancia en la búsqueda de soluciones y reconocer su validez ante situaciones problemáticas de la vida cotidiana.</p> <p>8. Elaborar estrategias personales para el análisis</p>	<p>para transformarla en una expresión algebraica. En lo referente al tratamiento de pautas numéricas, se valora si se está capacitado para analizar regularidades y obtener expresiones simbólicas, incluyendo formas iterativas y recursivas.</p> <p>3. Resolver problemas de la vida cotidiana en los que se precise el planteamiento y resolución de ecuaciones de primer y segundo grado o de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas.</p> <p>Este criterio va dirigido a comprobar la capacidad para aplicar las técnicas de manipulación de expresiones literales para resolver problemas que puedan ser traducidos previamente a ecuaciones y sistemas. La resolución algebraica no se plantea como el único método de resolución y se combina también con otros métodos numéricos y gráficos, mediante el uso adecuado de los recursos tecnológicos.</p> <p>5. Utilizar modelos lineales para estudiar diferentes situaciones reales expresadas mediante un enunciado, una tabla, una gráfica o una expresión</p>
--	--	---	---

		<p>de situaciones concretas y la identificación y resolución de problemas, utilizando distintos recursos e instrumentos y valorando la conveniencia de las estrategias utilizadas en función del análisis de los resultados y de su carácter exacto o aproximado.</p> <p>9. Manifestar una actitud positiva ante la resolución de problemas y mostrar confianza en la propia capacidad para enfrentarse a ellos con éxito y adquirir un nivel de autoestima adecuado, que le permita disfrutar de los aspectos creativos, manipulativos, estéticos y utilitarios de las matemáticas.</p> <p>10. Integrar los conocimientos matemáticos en el conjunto de saberes que se van adquiriendo desde las distintas áreas de modo que puedan emplearse de forma creativa, analítica y crítica.</p>	<p>algebraica.</p> <p>Este criterio valora la capacidad de analizar fenómenos físicos, sociales o provenientes de la vida cotidiana que pueden ser expresados mediante una función lineal, construir la tabla de valores, dibujar la gráfica utilizando las escalas adecuadas en los ejes y obtener la expresión algebraica de la relación. Se pretende evaluar también la capacidad para aplicar los medios técnicos al análisis de los aspectos más relevantes de una gráfica y extraer de ese modo la información que permita profundizar en el conocimiento del fenómeno estudiado.</p>
MATEMÁTICA-Operaciones	3.2.5. Utiliza diferentes estrategias mentales para realizar cálculos.	<p>1. Mejorar la capacidad de pensamiento reflexivo e incorporar al lenguaje y modos de argumentación las formas de expresión y razonamiento matemático, tanto en los procesos matemáticos o científicos como en los distintos ámbitos de la actividad humana.</p>	<p>1. Utilizar los números racionales, sus operaciones y propiedades, para recoger, transformar e intercambiar información y resolver problemas relacionados con la vida diaria.</p> <p>Se trata de valorar la capacidad de identificar y</p>

		<p>2. Reconocer y plantear situaciones susceptibles de ser formuladas en términos matemáticos, elaborar y utilizar diferentes estrategias para abordarlas y analizar los resultados utilizando los recursos más apropiados.</p>	<p>emplear los números y las operaciones siendo conscientes de su significado y propiedades, elegir la forma de cálculo apropiada: mental, escrita o con calculadora, y estimar la coherencia y precisión de los resultados obtenidos. Es relevante también la adecuación de la forma de expresar los números: decimal, fraccionaria o en notación científica, a la situación planteada. En los problemas que se han de plantear en este nivel adquiere especial relevancia el empleo de la notación científica así como el redondeo de los resultados a la precisión requerida y la valoración del error cometido al hacerlo.</p>
<p>APRENDER A APRENDER-Fijación de objetivos</p>	<p>2.3.3. Hace con regularidad las tareas de casa y es ordenado con sus cuadernos y materiales.</p>	<p>Plantearse metas alcanzables a corto, medio y largo plazo y cumplirlas, elevando los objetivos de aprendizaje de forma progresiva y realista.</p>	<p>Autonomía y perseverancia</p>
<p>APRENDER A APRENDER-Hábitos de trabajo</p>	<p>2.5.4. Lleva al día los cuadernos, trabajos y tareas a realizar y corrige los mismos.</p>	<p>Disponer de un sentimiento de competencia personal, que redunde en la motivación, la confianza en uno mismo y el gusto por aprender.</p> <p>Ser capaz de autoevaluarse y autorregularse, responsabilidad y compromiso personal,</p>	<p>Autonomía, perseverancia y reflexión crítica.</p>

Métodos de resolución y errores en problemas de funciones lineales y afines del alumnado de 3º ESO del aula ordinaria y del aula de excelencia

		saber administrar el esfuerzo, aceptar los errores y aprender de y con los demás.	
APRENDER A APRENDER-Trabajo cooperativo	2.6.1. Participa activamente en las tareas que se le encomiendan en el grupo.	Adquirir conciencia de las propias capacidades (intelectuales, emocionales, físicas), del proceso y las estrategias necesarias para desarrollarlas, así como de lo que se puede hacer por uno mismo y de lo que se puede hacer con ayuda de otras personas o recursos.	Habilidad de comunicar con eficacia los resultados del propio trabajo y participación activa en el grupo.
SOCIAL Y CIUDADANA-Asunción de responsabilidad	6.7.2. Muestra hábitos de trabajo en clase y en casa.	Responsabilizarse de las elecciones y decisiones adoptadas.	Autonomía y perseverancia.

3. Contenidos Edukiak	
1. Función lineal: 1.1. Constante de proporcionalidad directa 1.2. Representación gráfica y tabla de valores 1.3. Expresión algebraica $y=mx$ 1.4. Características de la función lineal: continuidad, crecimiento/decrecimiento, impar o simétrica respecto del origen de coordenadas y pendiente.	
2. Función afín: 2.1. Representación gráfica y tabla de valores 2.2. Expresión algebraica $y=mx+n$ 2.3. Pendiente m y ordenada en el origen n 2.4. Características de la función afín: continuidad, crecimiento/decrecimiento y pendiente. 2.5. Transformación y ecuación general de la recta forma implícita $Ax+By+C=0 \rightarrow y=mx+n$	
3. Obtención de la ecuación de la recta (de la ecuación a la gráfica y viceversa) y casos particulares: 3.1. Dados un punto y su pendiente 3.2. Dados dos puntos 3.3. Recta paralela al eje X, Pendiente=0; Función constante $y=cte$ 3.4. Recta paralela al eje Y, Pendiente= ∞ ; Recta $x=cte$, no es una función	
4. Posición relativa de dos rectas: 4.1. Rectas coincidentes: sist. compatible indeterminado	

- 4.2.** Rectas paralelas: sist. incompatible
4.3. Rectas secantes: sist. compatible determinado

5. Aplicaciones-Problemas

4. Metodología

Metodología

Las mayoría de las clases que se componen básicamente de tres partes:

- Teoría a través de presentación de diapositivas (proyectando powerpoint del cañón a la pizarra) y explicaciones en pizarra
- Resolución de ejercicios y problemas de manera individual
- Corrección en pizarra ó en voz alta por los compañeros o por el profesor (pizarra o Geogebra), tanto los planteados en clase como los mandados de tarea.

Clases exclusivamente de ejercicios en el cuaderno realizados individualmente pero también por parejas.

Estas actividades en su mayoría son tomadas del libro de texto de referencia pero también de otros materiales y de recursos web.

Examen escrito al final del tema.

5. Actividades de enseñanza – aprendizaje y seguimiento de la unidad didáctica

Irakaskuntza- ikaskuntza jarduerak

Nº Sesiones	Metodología/Actividades que queremos desarrollar	Indic.	Instrumentos de evaluación	% nota
1	Teoría 1. Función lineal, powerpoint y pizarra. Ejercicios de las diapositivas dirigidos a todo el grupo, oralmente. Práctica: página 135 ejercicio 2.	3.2.4.		40%

Métodos de resolución y errores en problemas de funciones lineales y afines del alumnado de 3º ESO del aula ordinaria y del aula de excelencia

2	<p>Se comprueba que han hecho tarea.</p> <p>Corrección de tarea en pizarra (alumnos) y con Geogebra (profesora).</p> <p>Ejercicio 1 página 134 y Llénname, individualmente. Profesora corrige en pizarra.</p> <p>Teoría 2. Función afín, powerpoint y pizarra.</p> <p>Práctica: página 136 ejercicios del 3 al 7.</p>	<p>2.3.3.</p> <p>6.7.2.</p> <p>3.2.4.</p>	<p>Seguimiento de tareas realizadas en casa y en clase: observación directa. Se les pone punto positivo/negativo según si se ha realizado la tarea o no.</p> <p>Participación en clase: observación directa. Se les pone punto positivo cada vez que salen a la pizarra a resolver un ejercicio que han realizado en clase o de tarea.</p>	<p>5%</p> <p>5%</p> <p>40%</p>
3	<p>Se comprueba que han hecho tarea.</p> <p>Teoría 2. Función afín, powerpoint y pizarra.</p> <p>Corrección de tarea con Geogebra (profesora).</p> <p>Ejercicios diapositivas, página 137 ejercicios 8 y 9, individualmente y se corrigen en pizarra por alumnado.</p>	<p>2.3.3.</p> <p>6.7.2.</p> <p>3.2.4.</p>	<p>Seguimiento de tareas realizadas en casa y en clase: observación directa. Se les pone punto positivo/negativo según si se ha realizado la tarea o no.</p>	<p>5%</p> <p>5%</p> <p>40%</p>
4	<p>Ejercicios “de pensar”.</p> <p>Teoría 3. Ecuación de la recta, powerpoint y pizarra.</p> <p>Ejercicios página 138 10, 11 y 12. Se corrigen con Geogebra (profesora).</p> <p>Tarea para fin de semana: ejercicios propuestos de final de tema: 2a, 5, 9, 14, 21, 27, 32 y 41.</p>	<p>3.2.5.</p> <p>3.2.4.</p>	<p>Ejercicios “de pensar”.</p>	<p>5%</p> <p>40%</p>
5	<p>Se comprueba que han hecho tarea.</p> <p>Corrección de tarea en pizarra por alumnos.</p> <p>Ejercicios del final de tema individualmente: 11b, 15, 20, 28, 29, 30, 31, 33 a,b.</p> <p>Se les manda de tarea los que no hayan terminado.</p>	<p>2.3.3.</p> <p>6.7.2.</p> <p>3.2.4.</p>	<p>Seguimiento de tareas realizadas en casa y en clase: observación directa. Se les pone punto positivo/negativo según si se ha realizado la tarea o no.</p> <p>Participación en clase: observación directa. Se les pone punto positivo cada vez que salen a la pizarra a resolver un ejercicio que han realizado en clase o de tarea.</p>	<p>5%</p> <p>5%</p> <p>40%</p>

6	Se comprueba que han hecho tarea. Corrección de tarea en pizarra por alumnos y con Geogebra (profesora). Teoría 4. Posiciones relativas, powerpoint y pizarra.	2.3.3. 6.7.2. 3.2.4.	Seguimiento de tareas realizadas en casa y en clase: observación directa. Se les pone punto positivo/negativo según si se ha realizado la tarea o no. Participación en clase: observación directa. Se les pone punto positivo cada vez que salen a la pizarra a resolver un ejercicio que han realizado en clase o de tarea.	5% 5% 40%
7	Teoría 4. Posiciones relativas, powerpoint y pizarra. Propuesta de ejercicios para casa: ejercicios 13, 14, 15 y 16 página 141.	3.2.4.		40%
8	Ejercicios “de pensar”. Corrección de ejercicios en pizarra y con Geogebra por profesora. Se pone fecha examen para la semana siguiente. Práctica: ejercicios de final de tema del 35 al 40. Tarea para fin de semana: ejercicios propuestos de final de tema 42 a 45.	3.2.5. 2.6.1. 3.2.4.	Ejercicios “de pensar”.	5% 3% 40%
9	Ejercicio “fontaneros” por parejas. Resolución por parte del alumnado oralmente y profesora con Geogebra.	3.2.4.		40%
10	Dudas examen. Ejercicios individualmente tipo examen. Consejos y advertencias examen.	3.2.4.		40%
11	Examen individual escrito.	3.2.4.	Examen individual escrito 50’.	40%
12	Corrección en pizarra examen y comentarios sobre los exámenes, se reparten exámenes y revisión de exámenes.	3.2.4.		40%

OBSERVACIONES/ACCIONES CORRECTORAS

Se planteó a priori la unidad didáctica entera, con la temporalización, contenidos, ejercicios y actividades para cada día. Sin embargo, ha sido necesario ir adaptándola sobre la marcha a diario según lo trabajado cada día en clase y según la comprensión del alumnado. Existe una gran dificultad de hacer cada día exactamente lo que se ha planteado previamente.

6. Cómo voy a evaluar y calificar al alumno: Instrumentos.

Nola ebaluatuko dut: Tresnak.

- Seguimiento de tareas realizadas en casa y en clase: observación directa. Se les pone punto positivo/negativo según si se ha realizado la tarea o no.
- Participación en clase: observación directa. Se les pone punto positivo cada vez que salen a la pizarra a resolver un ejercicio que han realizado en clase o de tarea.
- Examen escrito final de tema: 50'.

7. Atención a la diversidad: Actividades de refuerzo y/o ampliación

Dibertsitaterako arreta: Errefortzu edota zabaltzeko jarduerak.

En la medida de lo posible, se introducen los conceptos del tema a través de ejemplos relacionados con la vida cotidiana.

Se hacen continuas referencias a conceptos previos para interrelacionar los nuevos contenidos con los aprendizajes ya adquiridos en temas anteriores de las distintas evaluaciones.

Se explican los contenidos por orden pero haciendo mención a conceptos de la propia lección que se introducen propiamente en sesiones futuras.

Se les plantean preguntas continuamente para que piensen.

Se realizan las actividades del libro y se plantean ejercicios y problemas de ampliación que requieren una comprensión con mayor profundidad y la relación de los contenidos.

Se tratan diferentes formas de hacer los ejercicios para llegar a la misma solución evitando el aprendizaje de fórmulas.

Se introduce Geogebra como herramienta para comprobar resultados y resolver ejercicios.

8. Material didáctico: recursos didácticos

Material didaktikoa: baliabide didaktikoak

- Libro de texto de referencia y otros libros de texto
- Internet
- Geogebra
- Transparencias colgadas en plataforma Moodle

9. Anexos (Documentos adjuntos)

Dokumentu gehiago

- Transparencias colgadas en plataforma Moodle
- Examen escrito

10. Seguimiento y evaluación de la unidad didáctica.

Segimendu eta ebaluazioa

En las sesiones dedicadas se ha asegurado la comprensión de los objetivos fijados previamente a través de las explicaciones en pizarra, con diapositivas y con la realización de ejercicios del libro más alguna de más complejidad o más variado. Quizá se ha sido demasiado conservador. Sería interesante para futuros cursos dedicar alguna sesión más a este tema para que por ejemplo un día se “trasteara” con Geogebra en ordenadores y también otra sesión con ejercicios más complejos de aplicaciones de funciones. Además también es enriquecedor ponerlos por parejas niveladas para que hagan ejercicios y problemas juntos.

Métodos de resolución y errores en problemas de funciones lineales y afines del alumnado de 3º ESO del aula ordinaria y del aula de excelencia

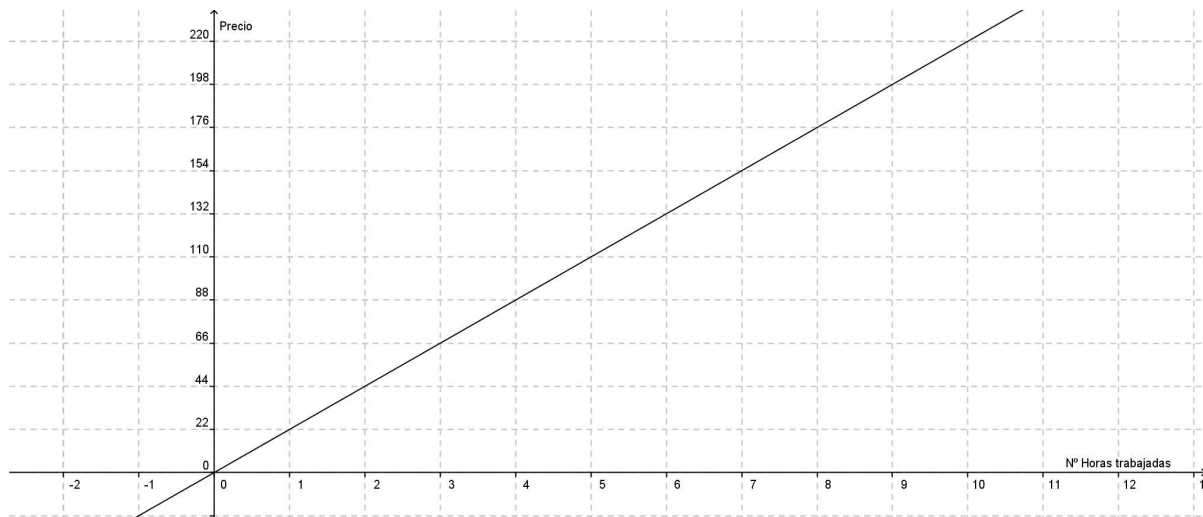
C. Material proyectado en clase

D. Problema repaso “Necesito un fontanero”

NECESITO UN FONTANERO

Javier tiene una avería en el baño de su casa y necesita con urgencia un fontanero. Nuria, una compañera de trabajo, le ha dado la referencia de dos empresas de fontanería, cuyas tarifas son las siguientes:

- La empresa A cobra 24 € por el desplazamiento encada reparación que hace en el domicilio del cliente, y 16 € más por cada hora de trabajo empleada.
- Las tarifas de la empresa B en sus reparaciones a domicilio se ajustan a la siguiente gráfica:



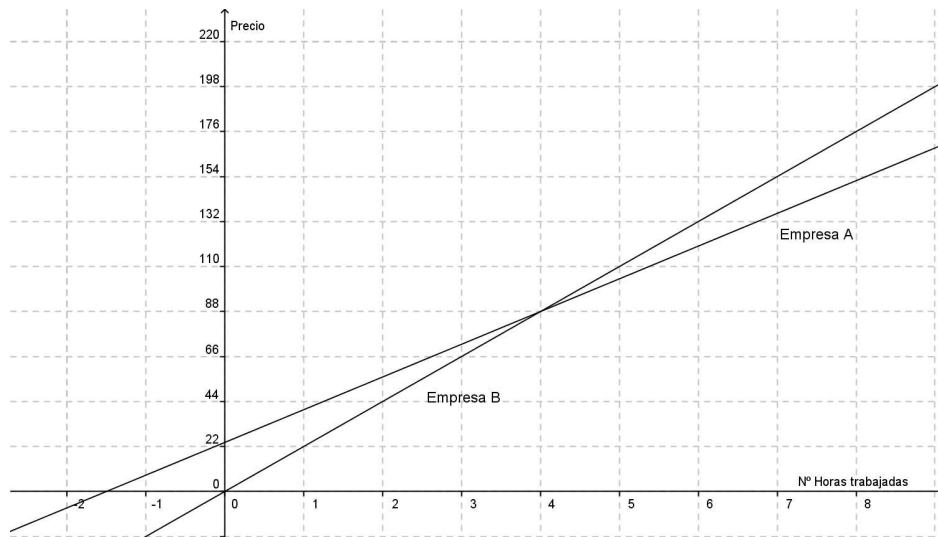
1. En caso de contratar los servicios de la empresa A, ¿qué expresión permite calcular el precio “y” que tiene que pagar un o una cliente por x horas de trabajo?

- A. $y = (24+16)x$
- B. $y = 24x + 16$
- C. $y = 24 + 16x$
- D. $y = 16x$

2. Escribe la expresión algebraica de la función que permite calcular el precio “y” que tiene que pagar un cliente por “x” horas de trabajo, en caso de optar por la empresa B.

Respuesta:

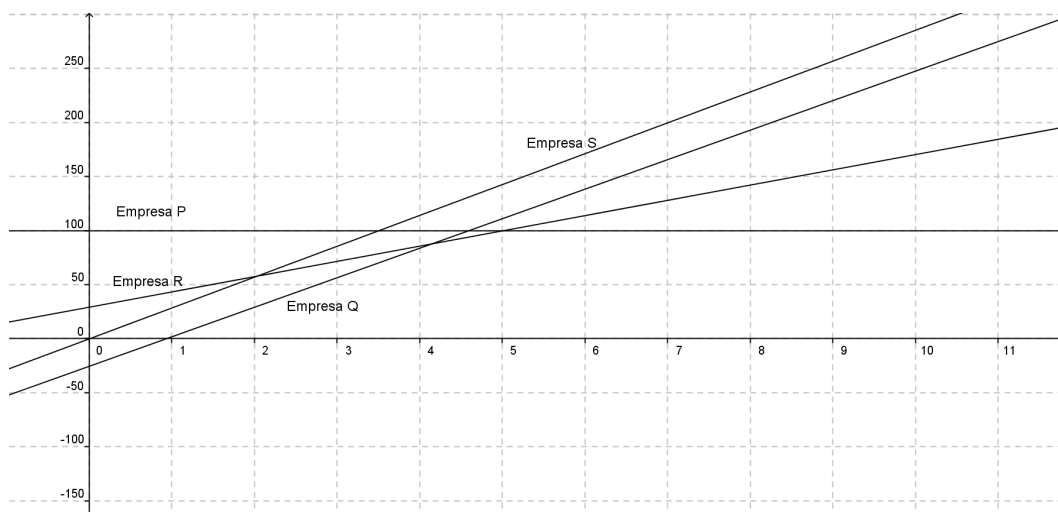
Javier ha decidido representar conjuntamente las tarifas de ambas empresas para establecer comparaciones, y esto es lo que ha obtenido:



3. Como Javier prevé que la reparación de su baño dure unas 5 horas, se ha decantado por la empresa A. Indica a cuánto asciende su factura y razona si ha hecho la elección más conveniente para su bolsillo.

Respuesta:

4. Antes de estudiar las empresas A y B, Javier descartó por motivos de plazos a las empresas P, Q, R y S. Las tarifas de todas ellas se encuentran representadas a continuación. Indica, teniendo en cuenta su previsión de 5 horas de trabajo, con cuál de ellas le habría salido más cara la reparación.



- A. La empresa P
- B. La empresa Q
- C. La empresa R
- D. La empresa S

E. Modelo de evaluación del examen

Ejercicio 1 (3 puntos)
<p>Dadas las rectas:</p> <p>a) $5x + 2y = -1$</p> <p>b) $4x - y = 7$</p> <p>Determina sus características (crecimiento, pendiente y ordenada en el origen) y su posición relativa.</p>
<ul style="list-style-type: none"> Recta a): 0,5 puntos = 0,17 crecimiento + 0,17 pendiente + 0,17 ordenada en el origen. Recta b): ídem. Posición relativa: 2 puntos. Rectas con distinta pendiente: secantes. <ul style="list-style-type: none"> -1 punto: razonamiento incompleto o incorrecto. No necesario hallar punto de corte: no se descuenta por hallar incorrectamente dicho punto ni por resolver mal el sistema.
Ejercicio 2 (1,5 puntos)
<p>Halla la ecuación de la recta:</p> <p>a) paralela al eje X y que pasa por A (1,3)</p> <p>b) que tenga pendiente 4 y ordenada en el origen - 0,5.</p> <p>c) que tenga igual pendiente que $3x + 2y = 6$ y pase por B (-2,3)</p>
<ul style="list-style-type: none"> Ecuación de rectas a), b) y c) 0,5 puntos = 0,25 pendiente + 0,25 ordenada en el origen.
Ejercicio 3 (1,5 puntos)
<p>Para celebrar la fiesta de fin de curso, un grupo de amigos alquila un local, y eligen entre dos locales cuyas ofertas son:</p> <p>Camelot: 1.000 € por el alquiler del local y 5 € por asistente.</p> <p>Morgana: 200 € por el alquiler del local y 10 € por asistente.</p> <p>La capacidad máxima en ambos locales es de 300 personas, ¿cuál de ellos elegirías?</p>
<ul style="list-style-type: none"> 0,17 puntos: recta que modeliza Camelot. 0,17 puntos: recta que modeliza Morgana. 0,17 puntos: indicar significado de variables (por ej.: x asistentes y precio) Razonamiento 0,5 puntos: <ul style="list-style-type: none"> 0,17 puntos: nº asistentes $x >$ x punto de corte de las rectas → Camelot. 0,17 puntos: nº asistentes $x <$ x punto de corte de las rectas → Morgana. 0,17 puntos: nº asistentes $x =$ x punto de corte de las rectas → Indiferente Camelot o Morgana. Cálculo correcto del punto de corte 0,5 puntos.

